

【Ⅰ】

〔解答〕

(1)

ア	イ	ウ
30	5	$5\sqrt{2}\cos 2\theta - 9$

エ	オ
4	$\frac{\pi}{8}$

(2)

ア	イ	ウ
$(\alpha - \beta)t + \beta$	$(\alpha + \beta - 1)t + 1 - \beta$	$\alpha + \beta - 1$

エ	オ
$1 - \beta$	$\alpha + \beta - 2\alpha\beta$

〔解説〕

(1)

A(5, 5, 0), B(0, 10, 0), C(−4, 2, 0) より

$$\overrightarrow{AB} = (0 - 5, 10 - 5, 0 - 0) = (-5, 5, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-4 - 5, 2 - 5, 0 - 0) = (-9, -3, 0)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-4 - 0, 2 - 10, 0 - 0) = (-4, -8, 0)$$

である。まず $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{BC}|$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ を計算すると

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + 0^2} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-9)^2 + (-3)^2 + 0^2} = 3\sqrt{10}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 0^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -5 \cdot (-9) + 5 \cdot (-3) + 0 = 30$$

となる。よって $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(5\sqrt{2})^2 \cdot (3\sqrt{10})^2 - 30^2} \\ &= 30 \end{aligned}$$

となる。つづけて $\triangle ABC$ の面積について式を立てると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \angle BAC &= 30 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \sin \angle BAC &= 30 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin \angle BAC = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

となる。よって、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R として、 $\triangle ABC$ について正弦定理を用いて

$$2R = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{\sin \angle BAC}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{4\sqrt{5}}{2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$\therefore R = 5$$

を得る。次に、点 D の x 座標を整理すると

$$10\sqrt{2}\cos^2 \theta - 5\sqrt{2} - 9 = 5\sqrt{2}(2\cos^2 \theta - 1) - 9$$

$$= 5\sqrt{2}\cos 2\theta - 9$$

となり、同様に点 D の y 座標も整理すると

$$5\sqrt{2}\cos \theta \sin \theta - \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2}$$

となる。以上得られた結果より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= \left(5\sqrt{2}\cos 2\theta - 9 - (-4), \frac{5\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2} - 2, 5 - 0 \right) \\ &= \left(5\sqrt{2}\cos 2\theta - 5, \frac{5\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta - \frac{5}{2}, 5 \right) \end{aligned}$$

となるから、条件 $AB \perp CD$ より

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$\Leftrightarrow -5(5\sqrt{2}\cos 2\theta - 5) + 5\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta - \frac{5}{2}\right) + 0 \cdot 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\theta - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sin(2\theta - \alpha) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

を得る。ただし、 α は $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数である。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より

$$-\alpha \leq 2\theta - \alpha < 4\pi - \alpha \text{ となる。また } \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ となる } \beta \text{ を考えると } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

における $\sin \theta$ の単調増加性より $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ となる。よって、先ほど求めた θ についての方

程式の解は

$$2\theta - \alpha = -\beta, \pi + \beta, 2\pi - \beta, 3\pi + \beta$$

$$\therefore \theta = \frac{\alpha - \beta}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{2}, \frac{\alpha - \beta}{2} + \pi, \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{3}{2}\pi$$

の4つ存在する。この4つの θ のうち、 $\theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$ のみ $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ を満たす。ゆえに $\theta_0 = \frac{\alpha - \beta}{2}$ で

ある。ところで

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2} \right)$$

であるから、

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

となる。

(2)

1回目の試行で表が出るのは金貨を選んで表を出すか、銀貨を選んで表を出すかのいずれか

であり、これらは互いに排反である。よって1回目の試行で表が出る確率 q_1 は

$$\begin{aligned} q_1 &= t\alpha + (1-t)\beta \\ &= (\alpha - \beta)t + \beta \end{aligned}$$

である。また2回目の試行で金貨を投げるのは1回目の試行で金貨を投げて表を出すか、1回

目の試行で銀貨を投げて裏を出すかのいずれかであり、これらは互いに排反である。よって

2回目の試行で金貨を投げる確率 p_2 は

$$\begin{aligned} p_2 &= t\alpha + (1-t)(1-\beta) \\ &= (\alpha + \beta - 1)t + 1 - \beta \end{aligned}$$

である。同様に考えると $n+1$ 回目の試行で金貨を投げるのは n 回目の試行で金貨を投げて表

を出すか、 n 回目の試行で銀貨を投げて裏を出すかのいずれかであり、これらは互いに排反

である。 n 回目の試行で銀貨を投げる確率は $1 - p_n$ であることに注意すると p_{n+1} は p_n を用い

て

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \alpha p_n + (1 - p_n)(1 - \beta) \\ &= (\alpha + \beta - 1)p_n + 1 - \beta \end{aligned}$$

となる。この漸化式を変形すると

$$\left(p_{n+1} - \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} \right) = (\alpha + \beta - 1) \left(p_n - \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} \right)$$

となるから、数列 $\left\{ p_n - \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} \right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} = t - \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta}$ 、公比 $\alpha + \beta - 1$ の等比数

列である。ゆえにその一般項は

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} &= \left(t - \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} \right) (\alpha + \beta - 1)^{n-1} \\ \therefore p_n &= \left(t - \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} \right) (\alpha + \beta - 1)^{n-1} + \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} \end{aligned}$$

である。 $0 < \alpha + \beta < 1$ より $-1 < \alpha + \beta - 1 < 0$ であるから、極限値を計算すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta}$$

となる。また n 回目の試行で表を出すのは n 回目の試行で金貨を投げて表を出すか、銀貨を

投げて表を出すかの2通りで、これらは排反である。よって q_n は

$$\begin{aligned} q_n &= \alpha p_n + \beta(1 - p_n) \\ &= (\alpha - \beta)p_n + \beta \end{aligned}$$

である。よって極限値を計算すると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} q_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (\alpha - \beta)p_n + \beta \} \\ &= (\alpha - \beta) \left(\frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} \right) + \beta \\ &= \frac{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}{2 - \alpha - \beta} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

$g(x)=e^x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)$ とする。 $x>0$ で常に $g(x)>0$ であることを示す。まず、 $g(x)$ の 2 回微分まで求めると

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x - (1+x) \\ g''(x) &= e^x - 1 \end{aligned}$$

である。 e^x は x について単調増加関数であり、 $g(0)=0$ であるから、 $x>0$ の範囲で $g''(x)>0$ である。ゆえに、 $x>0$ で $g'(x)$ は単調増加する。さらに $g'(0)=0$ であるから、 $x>0$ の範囲で $g'(x)>0$ である。ゆえに、 $x>0$ で $g(x)$ は単調増加する。最後に $g(0)=0$ であるから、 $x>0$ の範囲で $g(x)>0$ である。ゆえに $x>0$ で $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$ である。

(証明終)

(2)

$f(x)=xe^{-x}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

である。ゆえに $f(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

次に $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を求める。(1)の結果を用いると、 $x>0$ のもとで

$$\begin{aligned} e^x &> 1+x+\frac{1}{2}x^2 \\ \Leftrightarrow e^{-x} &< \frac{1}{1+x+\frac{1}{2}x^2} \\ \Leftrightarrow xe^{-x} &< \frac{x}{1+x+\frac{1}{2}x^2} \quad (\because x>0) \end{aligned}$$

である。 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x+\frac{1}{2}x^2} = 0$, $0 < xe^{-x}$ より、はさみうちの原理から $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ であ

る。また $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ については $t=-x$ と置換することで

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t)e^t = -\lim_{t \rightarrow +\infty} te^t$$

となるが、

$$te^t > t \left(1+t+\frac{1}{2}t^2 \right) = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + t$$

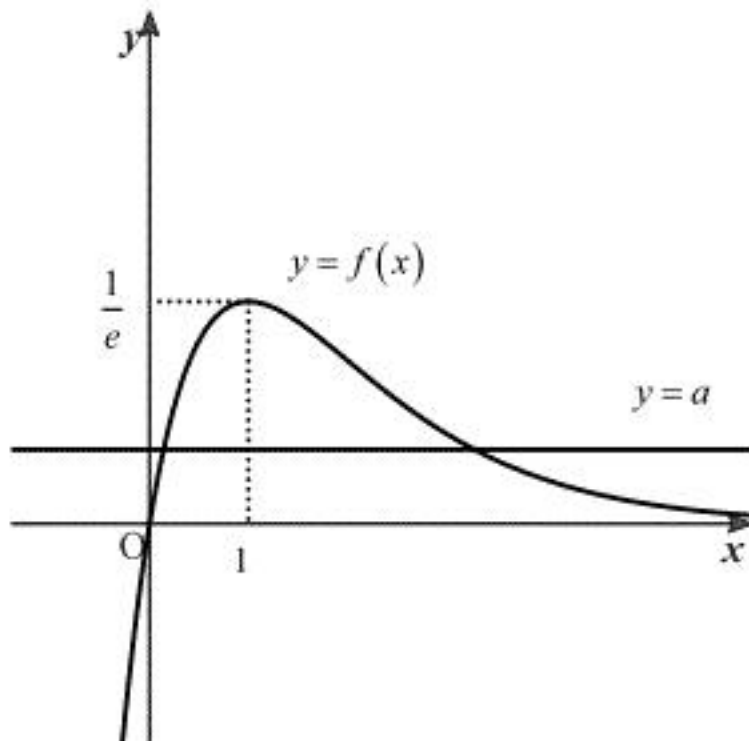
であり、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}t^3 + t^2 + t \right) = \infty$$

となることから

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

を得る。以上のことから、 $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



方程式 $f(x)=a$ の実数解の数は $y=f(x)$ と $y=a$ の交点の数に等しい。 $0 < a < \frac{1}{e}$ であるから、上図より確かに 2 つの交点をもつ。

(証明終)

(3)

部分積分法を用いて $\int \{f(x)\}^2 dx$ を計算すると

$$\begin{aligned} \int \{f(x)\}^2 dx &= \int x^2 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} - \int \left(-\frac{e^{-2x}}{2} \right) 2x dx + C \\ &= -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} + \int x e^{-2x} dx + C \\ &= -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} - \frac{x e^{-2x}}{2} - \int \left(-\frac{e^{-2x}}{2} \right) dx + C \\ &= -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} - \frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C \\ &= -\frac{1}{4} (2x^2 + 2x + 1) e^{-2x} + C \end{aligned}$$

である。ただし C は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad \int \{f(x)\}^2 dx = -\frac{1}{4} (2x^2 + 2x + 1) e^{-2x} + C$$

(4)

回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_p^q \pi \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{4} (2x^2 + 2x + 1) e^{-2x} \right]_p^q \\ &= -\frac{\pi}{4} \{ (2q^2 + 2q + 1) e^{-2q} - (2p^2 + 2p + 1) e^{-2p} \} \end{aligned}$$

である。ここで、(2)の図より $a \rightarrow +0$ のとき $p \rightarrow +0$, $q \rightarrow \infty$ である。まず p に関する極限値を計算すると

$$\lim_{p \rightarrow +0} (2p^2 + 2p + 1) e^{-2p} = 1$$

である。つぎに q に関する極限値を計算すると

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow +\infty} (2q^2 + 2q + 1) e^{-2q} &= \lim_{q \rightarrow +\infty} \left\{ \left(2 + \frac{2}{q} \right) (qe^{-q})^2 + e^{-2q} \right\} \\ &= 0 \quad \left(\because \lim_{q \rightarrow +\infty} qe^{-q} = 0 \right) \end{aligned}$$

である。よって求める極限値は

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} V &= -\frac{\pi}{4} (0 - 1) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow +0} V = \frac{\pi}{4}$$

【Ⅲ】

(1)

$f(t)=\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ を微分して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t)&=\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\left(1+\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}\right)\\&=\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\left(\frac{t+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{d}{dt}f(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

(2)

$t\sqrt{t^2+1}$ を t で微分して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(t\sqrt{t^2+1}\right)&=\sqrt{t^2+1}+t\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}\\&=\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\\&=\sqrt{t^2+1}+\frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}}\\&=\sqrt{t^2+1}+\sqrt{t^2+1}-\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\\&=2\sqrt{t^2+1}-\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

となるので、 $a=2, b=1$ とすればよい。(1)の結果と合わせると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(t\sqrt{t^2+1}\right)&=2\sqrt{t^2+1}-\frac{d}{dt}\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\\&\Leftrightarrow \sqrt{t^2+1}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(t\sqrt{t^2+1}+\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right)\\&\therefore \int \sqrt{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+1}+\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right)+C\end{aligned}$$

である。ただし C は積分定数である。

$$\text{(答)} \quad a=2, b=1, \int \sqrt{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\left\{t\sqrt{t^2+1}+\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right\}+C$$

(3)

$$x-y=t \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \text{①}$$

を方程式 $(x-y)^2-2(x+y)=0$ に代入すると

$$\begin{aligned}t^2-2(x+y)&=0\\x+y&=\frac{t^2}{2} \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \text{②}\end{aligned}$$

となる。①、②を連立方程式として解くことで

$$x=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t, y=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t$$

を得る。

$$\text{(答)} \quad x=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t, y=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t$$

(4)

(3)で曲線を媒介変数表示したのでこれをもとにして考える。まず x については

$$x=\frac{1}{4}(t+1)^2-\frac{1}{4}$$

であるので $t=-1$ のときに $x=-\frac{1}{4}$ で最少となる。このときの y 座標は $y=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ である。

また y については

$$y=\frac{1}{4}(t-1)^2-\frac{1}{4}$$

であるので $t=1$ のときに $y=-\frac{1}{4}$ で最少となる。このときの x 座標は $x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ である。

$$\text{(答)} \quad \text{P}\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \text{Q}\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

(5)

x, y を t で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{t+1}{2}\\\frac{dy}{dt}&=\frac{t-1}{2}\end{aligned}$$

となる。また、点 P と点 Q の間は $-1 < t < 1$ の範囲である。よって曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{(t+1)^2 + (t-1)^2}{4}} dt \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sqrt{t^2+1} dt \\&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + t\sqrt{t^2+1} \right]_{-1}^1 \\&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left\{ \log\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} \right\} - \left\{ \log\left(\sqrt{2}-1\right) - \sqrt{2} \right\} \right] \\&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) + 2\sqrt{2} \right\} \\&= \frac{\log\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}} + 1 \\&= \frac{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}} + 1\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}} + 1$$

[IV]

(1)

x_1, x_2, y_1, y_2 は整数だから、条件より得られる等式の実部と虚部を比較して

$$\begin{aligned}(1+2i)(x_1+y_1i) &= 5 \\ \Leftrightarrow (x_1-2y_1) + (2x_1+y_1)i &= 5 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2y_1=5 \\ 2x_1+y_1=0 \end{cases} \\ \therefore x_1=1, y_1=-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+2i)(x_2+y_2i) &= 5i \\ \Leftrightarrow (x_2-2y_2) + (2x_2+y_2)i &= 5i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_2-2y_2=0 \\ 2x_2+y_2=5 \end{cases} \\ \therefore x_2=2, y_2=1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x_1=1, y_1=-2, x_2=2, y_2=1$$

(2)

$(1+2i)(s+ti)$ を計算すると

$$(1+2i)(s+ti) = (s-2t) + (2s+t)i$$

である。この数の実部と虚部がどちらも 0 以上 5 以下となるとき

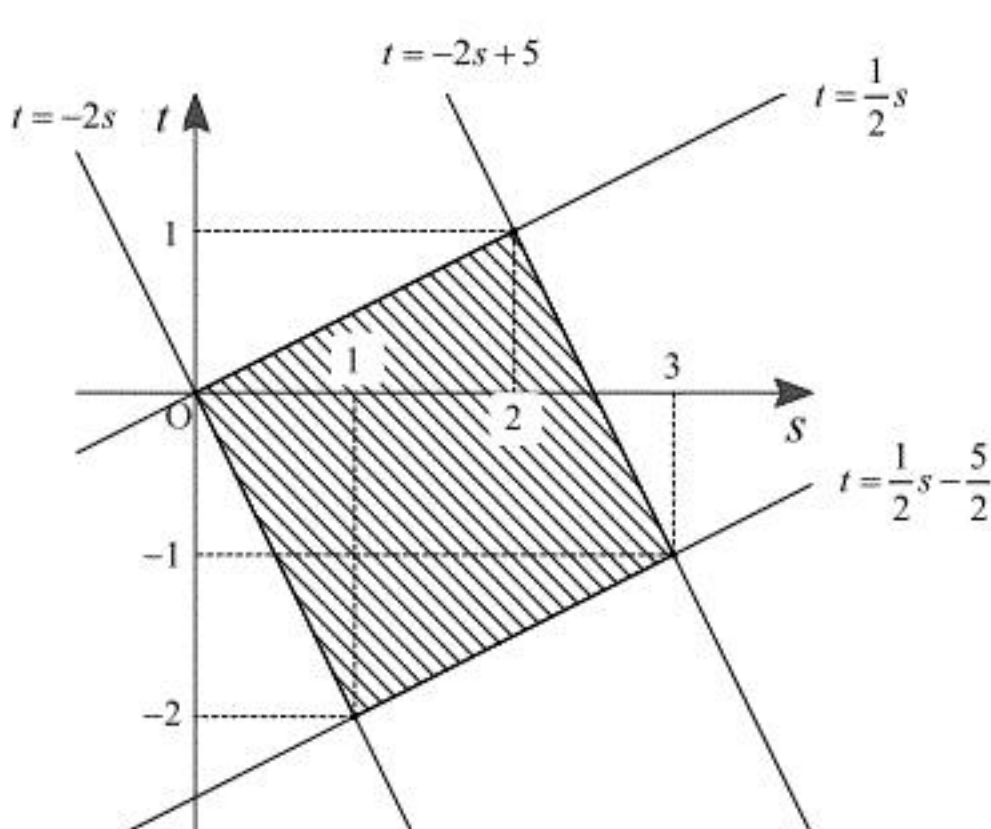
$$\begin{aligned}0 \leq s-2t \leq 5 \text{ かつ } 0 \leq 2s+t \leq 5 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}s - \frac{5}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}s \text{ かつ } -2s \leq t \leq -2s+5\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}s - \frac{5}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}s \text{ かつ } -2s \leq t \leq -2s+5$$

(3)

(2)で得られた不等式が示す領域を st 平面上に図示すると、下図斜線部となる、ただし境界線も含む。

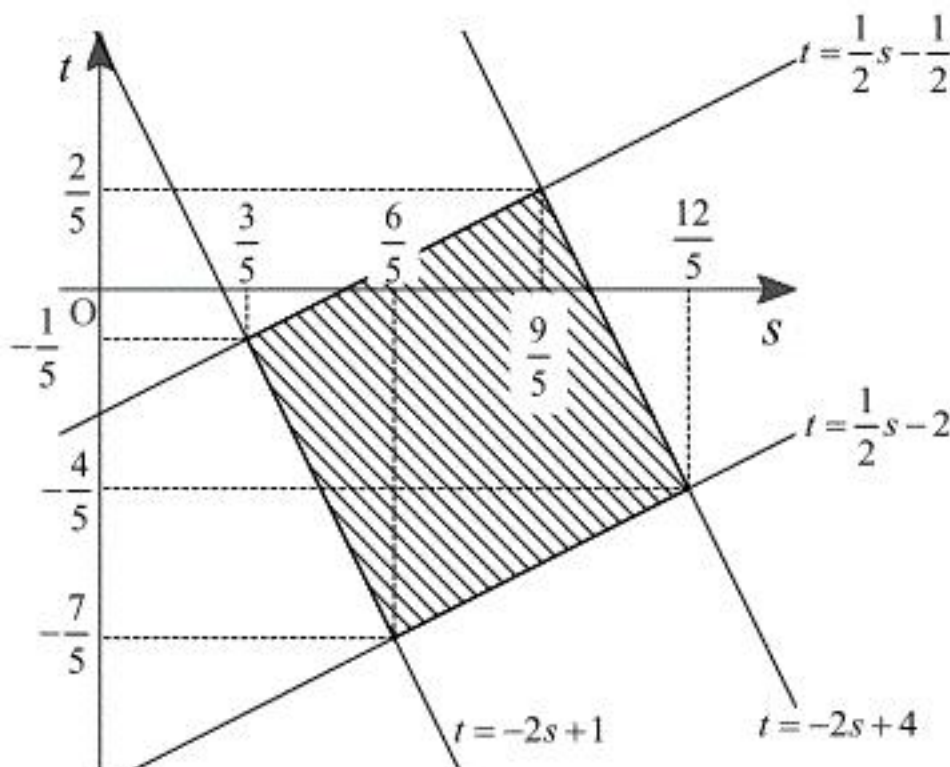


$(1+2i)(x+yi)$ の (x, y) という整数の組と L の要素は 1 対 1 に対応するので、この領域における格子点の数が m_5 である。この領域には格子点

$(0, 0), (1, 0), (1, -1), (1, -2), (2, 1), (2, 0), (2, -1), (3, -1)$ の 8 つあるので、 $m_5=8$ である。つぎに実部と虚部がどちらも 1 以上 4 以下になる場合を考える。このとき

$$\begin{aligned}1 \leq s-2t \leq 4 \text{ かつ } 1 \leq 2s+t \leq 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}s - 2 \leq t \leq \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} \text{ かつ } -2s+1 \leq t \leq -2s+4\end{aligned}$$

であるので同様に領域を図示するとさらに以下のような図になる。



この領域に存在する格子点の数は $(1, 0), (1, -1), (2, 0), (2, -1)$ の 4 つである。

$$(\text{答}) \quad m_5=8, (x, y) = (1, 0), (1, -1), (2, 0), (2, -1)$$

(4)

z が L の要素であるとき、ある整数の組 (x, y) を用いて $z = (1+2i)(x+yi)$ と書ける。このとき

$\frac{z+5}{1+2i}$ を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{z+5}{1+2i} &= \frac{z}{1+2i} + \frac{5}{1+2i} \\ &= x+yi+1-2i \\ &= (x+1) + (y-2)i\end{aligned}$$

となるので、 $z+5 = (1+2i)\{(x+1) + (y-2)i\}$ と書ける。 $x+1, y-2$ はどちらも整数なので $z+5$

は L の要素である。また $\frac{z+5i}{1+2i}$ を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{z+5i}{1+2i} &= \frac{z}{1+2i} + \frac{5i}{1+2i} \\ &= x+yi+2+i \\ &= (x+2) + (y+1)i\end{aligned}$$

であるので、 $z+5i = (1+2i)\{(x+2) + (y+1)i\}$ と書ける。 $x+2, y+1$ はどちらも整数なので

$z+5i$ は L の要素である。つづいて z が L の要素でないときを考える。このとき、 $1+2i \neq 0$ より

$s+ti = \frac{z}{1+2i}$ を満たす実数 s, t が存在する。 s, t がいずれも整数のとき、 z は L の要素となるので、 s, t の少なくとも一方は整数でない。すなわち、少なくとも一方は整数ではない実数の組 (s, t) を用いて、 $z = (1+2i)(s+ti)$ と表せる。

$\frac{z+5}{1+2i} = (s+1) + (t-2)i$ であるため s, t の少なくとも一方は整数ではないので $z+5$ は L の要素ではない。また、 $\frac{z+5i}{1+2i} = (s+2) + (t+1)i$ であるため s, t の少なくとも一方は整数ではないので $z+5i$ は L の要素ではない。

(証明終)

(5)

ある m_n に属する複素数を $X+Yi$ とする。ただし X, Y は実数である。(3)の結果より $m_5=8$ であり、 $1 \leq X \leq 4, 1 \leq Y \leq 4$ である L の要素の数は 4 である。 $n=10$ のとき、 $0 \leq X \leq 10, 0 \leq Y \leq 10$ を満たす L の要素を考える。(4)の結果を踏まえると、 $6 \leq X \leq 9, 1 \leq Y \leq 4$ である L の要素は 4 個であり、 $6 \leq X \leq 9, 6 \leq Y \leq 9$ である L の要素も 4 個であり、 $1 \leq X \leq 4, 6 \leq Y \leq 9$ である L の要素も 4 個である。また、 $X=0, 5, 10$ または $Y=0, 5, 10$ を満たすのは 3^2 個ある。以上で $0 \leq X \leq 10, 0 \leq Y \leq 10$ を満たす L の要素を過不足なく数え上げた。以上のことから m_{10} を計算すると

$$m_{10} = 4 \cdot 4 + 3^2 = 25$$

である。同様に m_{5k} を計算すると $1+5l \leq X \leq 4+5l, 1+5m \leq Y \leq 4+5m$ ($l, m=0, 1, 2, \dots, k-1$) を満たす要素がすべての (l, m) の組に対して 4 個ずつ存在し、 $X=5l, Y=5m$

$(l, m=0, 1, 2, \dots, k-1, k)$ を満たす要素がすべての (l, m) に対して 1 個ずつ存在するのですべて合わせると

$$m_{5k} = 4 \cdot k^2 + 1 \cdot (k+1)^2 = 5k^2 + 2k + 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad m_{10}=25, m_{5k}=5k^2+2k+1$$

(6)

$\{m_n\}$ は、そのとり方から広義単調増加数列である、つまり任意の n に対して $m_n \leq m_{n+1}$ である。また、(5)の結果より

$$m_{95}=1844, m_{100}=2041$$

である。次に m_{99} を考えてみると、 m_{99} は m_{100} から

$$(X, Y) = (100, 5a) \quad (a=0, 1, 2, \dots, 20)$$

$$(X, Y) = (5b, 100) \quad (b=0, 1, 2, \dots, 19)$$

をみたく複素数の個数を除いたものなので

$$m_{99} = 2041 - 20 - 21 = 2000$$

となる。ゆえに

$$m_{99} \leq 2019 < m_{100}$$

である。よって $n=99$ である。

$$(\text{答}) \quad n=99$$