

【Ⅰ】

〔解答〕

|     |                           |                      |                 |                   |                   |
|-----|---------------------------|----------------------|-----------------|-------------------|-------------------|
| (1) | <div>ア</div>              | <div>イ</div>         | <div>ウ</div>    | <div>エ</div>      | <div>オ</div>      |
|     | 45                        | 120                  | $3+\sqrt{3}$    | $2+(1+\sqrt{3})i$ | $(1+\sqrt{3})+2i$ |
| (2) | <div>カ</div>              | <div>キ</div>         | <div>ク</div>    | <div>ケ</div>      | <div>コ</div>      |
|     | $\frac{n^2-n+2}{2n(n-1)}$ | $\frac{n-3}{4(n-1)}$ | $\frac{n-4}{n}$ | $\frac{4}{n}$     | 8                 |

〔解説〕

(1)

$(2+\sqrt{3}+i)\alpha+(1-i)\gamma=(3+\sqrt{3})\beta$  を変形すると、

$$\begin{aligned}(1-i)(\gamma-\alpha)&=(3+\sqrt{3})\beta-(2+\sqrt{3}+i)\alpha-(1-i)\alpha\\&\Leftrightarrow(1-i)(\gamma-\alpha)=(3+\sqrt{3})(\beta-\alpha)\\&\Leftrightarrow\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{3+\sqrt{3}}{1-i}\\&\Leftrightarrow\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(3+\sqrt{3})(1+i)}{2}\\\therefore\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}&=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\cos 45^{\circ}+i\sin 45^{\circ})\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\angle A&=\left|\arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\right|=45^{\circ} \\AB:AC&=|\beta-\alpha|:|\gamma-\alpha|=\sqrt{2}:(3+\sqrt{3})\end{aligned}$$

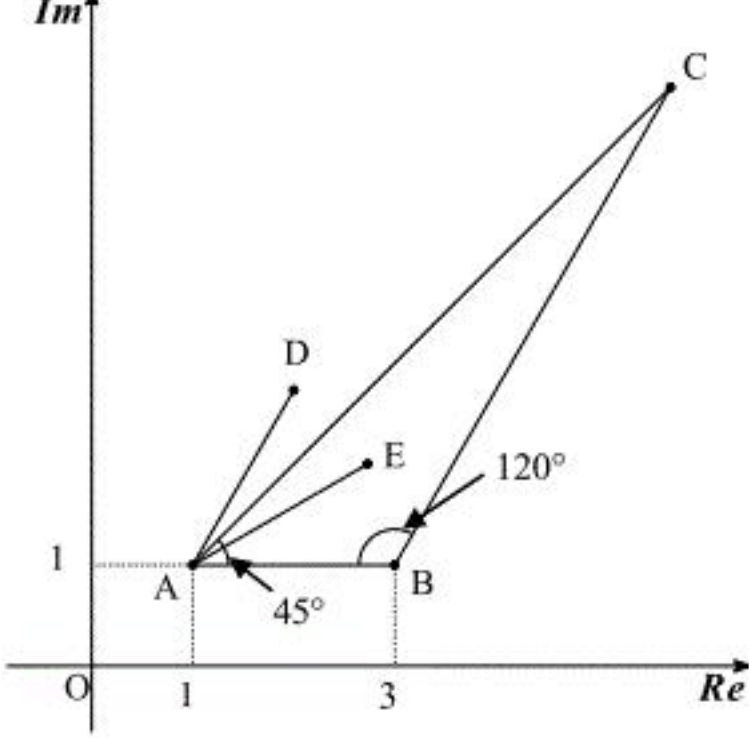
である。また、

$$\begin{aligned}(1-i)(\gamma-\beta)&=(3+\sqrt{3})\beta-(1-i)\beta-(2+\sqrt{3}+i)\alpha\\&\Leftrightarrow(1-i)(\gamma-\beta)=(2+\sqrt{3}+i)(\beta-\alpha)\\&\Leftrightarrow\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=-\frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i}\\&\Leftrightarrow\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=-\frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{2}\\&\Leftrightarrow\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=-\frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}i)}{2}\\\therefore\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}&=(1+\sqrt{3})\{\cos(-120^{\circ})+i\sin(-120^{\circ})\}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\angle B=\left|\arg\left(\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right)\right|=120^{\circ}$$

である。ここで、 $\alpha=1+i$ 、 $\beta=3+i$  のとき点 A, B, C, D は複素平面上に以下のようにかける。



$\angle BAD=60^{\circ}$  より、 $\triangle ABD$  は一辺の長さが 2 の正三角形であり、点 D を表す複素数は、 $2+(1+\sqrt{3})i$  である。また、直線 AC に関して点 D と対称な位置にある点を E とすると、 $\angle CAE=\angle CAD=15^{\circ}$  より、 $\angle BAE=45^{\circ}-15^{\circ}=30^{\circ}$  である。また、 $AE=AD=2$  であるから、点 E を表す複素数は、 $(1+\sqrt{3})+2i$  である。

(2)

両面が白のコインを  $X$ 、両面が黒のコインを  $Y_1, Y_2$ 、残り  $(n-3)$  枚のコインを  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-3}$  とする。また、取り出した 2 枚のコインの組み合わせを  $(X, Y)$  のように表す。2 枚のコインの取り出し方は  ${}_nC_2$  通り存在し、いずれも同様に確からしい。最初に確率  $P(A)$  を求める。事象  $A$  が起こるのは以下の 4 通りの場合が存在する。

[1]  $(X, Y_i)$  または  $(X, Y_2)$  の場合

コインの取り出し方は 2 通りで、いずれの場合でも出た面の色は異なる。

[2]  $(X, Z_i) (i=1, 2, \dots, n-3)$  の場合

コインの取り出し方は  $n-3$  通りで、各々の場合についてコイン  $Z_i$  の出た面の色が黒となれば良く、その確率は  $\frac{1}{2}$  である。

[3]  $(Y_1, Z_i)$  または  $(Y_2, Z_i) (i=1, 2, \dots, n-3)$  の場合

コインの取り出し方は  $2(n-3)$  通りで、各々の場合についてコイン  $Z_i$  の出た面の色が白となれば良く、その確率は  $\frac{1}{2}$  である。

[4]  $(Z_i, Z_j) (1 \leq i < j \leq n-3)$  の場合

コインの取り出し方は  ${}_{n-3}C_2$  通りで、各々の場合についてコイン  $Z_i, Z_j$  の出た面の色が異なれば良く、その確率は  ${}_2C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  である。

以上、[1]~[4]より、確率  $P(A)$  は

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{2}{{}_nC_2} \cdot 1 + \frac{n-3}{{}_nC_2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2(n-3)}{{}_nC_2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{{}_{n-3}C_2}{{}_nC_2} \cdot \frac{1}{2} \\&=\frac{2}{n(n-1)} \cdot \left\{ 2 + \frac{n-3}{2} + (n-3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2} \right\} \\&=\frac{n^2-n+2}{2n(n-1)}\end{aligned}$$

と求まる。次に、確率  $P(B)$  を求める。事象  $B$  が起こるのは以下の 2 通りの場合が存在する。

[1]  $(X, Z_i) (i=1, 2, \dots, n-3)$  の場合

コインの取り出し方は  $n-3$  通りで、各々の場合についてコイン  $Z_i$  の出た面の色が白となれば良く、その確率は  $\frac{1}{2}$  である。

[2]  $(Z_i, Z_j) (1 \leq i < j \leq n-3)$  の場合

コインの取り出し方は  ${}_{n-3}C_2$  通りで、各々の場合についてコイン  $Z_i, Z_j$  の出た面の色が共に白となれば良く、その確率は  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$  である。

以上、[1], [2]より、確率  $P(B)$  は

$$\begin{aligned}P(B)&=\frac{n-3}{{}_nC_2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{{}_{n-3}C_2}{{}_nC_2} \cdot \frac{1}{4} \\&=\frac{2}{n(n-1)} \cdot \left\{ \frac{n-3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2} \right\} \\&=\frac{n-3}{4(n-1)}\end{aligned}$$

と求まる。ここで、条件付き確率  $P_B(C)$ 、 $P_B(D)$  について考える。まず、事象  $B \cap C$  が起こるのは、事象  $B$  が起こる場合のうち[2]の場合に当てはまる。したがって、

$$\begin{aligned}P(B \cap C)&=\frac{{}_{n-3}C_2}{{}_nC_2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{(n-3)(n-4)}{4n(n-1)} \\ \therefore P_B(C)&=\frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{(n-3)(n-4)}{4n(n-1)} \cdot \frac{4(n-1)}{n-3} = \frac{n-4}{n}\end{aligned}$$

である。また、事象  $B \cap D$  が起こるのは、事象  $B$  が起こる場合のうち[1]の場合に当てはまる。したがって、

$$\begin{aligned}P(B \cap D)&=\frac{n-3}{{}_nC_2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n-3}{n(n-1)} \\ \therefore P_B(D)&=\frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{n-3}{n(n-1)} \cdot \frac{4(n-1)}{n-3} = \frac{4}{n}\end{aligned}$$

である。よって、 $P_B(C)=P_B(D)$  となるのは

$$\begin{aligned}P_B(C)&=P_B(D) \\ \Leftrightarrow \frac{n-4}{n}&=\frac{4}{n} \\ \therefore n&=8\end{aligned}$$

のときである。これは  $n$  が 5 以上の自然数という条件を満たす。

## 〔Ⅱ〕

(1)

三角関数の合成を用いると、

$$\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

となる。これを解くと、 $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$  であるから、

$$x + \frac{\pi}{4} = \pi, 2\pi$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

(2)

$c$  を 0 でない定数とする。直線  $y = c \sin x$  と曲線  $y = e^{-x}$  が  $x = r$  ( $0 \leq r \leq 2\pi$ ) で共有点をもち、その点で共通の接線をもつときを考える。それぞれの方程式の両辺を  $x$  で微分すると、

$y' = c \cos x$ ,  $y' = -e^{-x}$  であるから、

$$\begin{cases} e^{-r} = c \sin r \\ -e^{-r} = c \cos r \end{cases}$$

が成り立つ。このとき、

$$c \sin r + c \cos r = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin r + \cos r = 0 \quad (\because c \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

である。また  $c = \frac{e^{-r}}{\sin r}$  より、 $r = \frac{3}{4}\pi$  のとき  $c = \sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$ ,  $r = \frac{7}{4}\pi$  のとき  $c = -\sqrt{2}e^{-\frac{7}{4}\pi}$  である。し

たがって、 $a > b$  であるから、

$$a = \sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}, b = -\sqrt{2}e^{-\frac{7}{4}\pi}$$

であり、

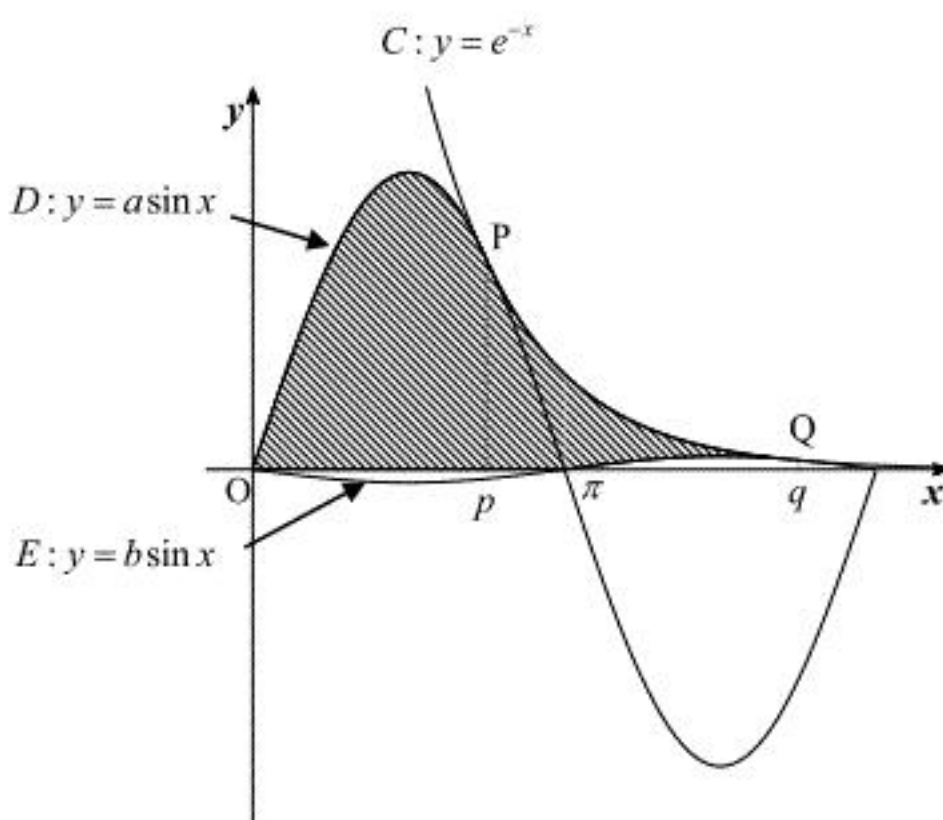
$$p = \frac{3}{4}\pi, q = \frac{7}{4}\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}, b = -\sqrt{2}e^{-\frac{7}{4}\pi}, p = \frac{3}{4}\pi, q = \frac{7}{4}\pi$$

(3)

$a > 0 > b$ ,  $p < q$  に注意すると、曲線  $C, D, E$  および点  $P, Q$  は以下のようにかける。



したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^p a \sin x dx + \int_p^q e^{-x} dx - \int_\pi^q b \sin x dx &= [-a \cos x]_0^p + [-e^{-x}]_p^q - [-b \cos x]_\pi^q \\ &= a(1 - \cos p) + (e^{-p} - e^{-q}) + b(\cos q + 1) \\ &= \sqrt{2}e^{-p} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (e^{-p} - e^{-q}) - \sqrt{2}e^{-q} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (2 + \sqrt{2}) \left(e^{\frac{3}{4}\pi} - e^{\frac{7}{4}\pi}\right) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (2 + \sqrt{2}) \left(e^{\frac{3}{4}\pi} - e^{\frac{7}{4}\pi}\right)$$



〔Ⅲ〕

(1)

点Eは直線AB上の点であるから、実数 $l$ を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= (1-l)\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} \\ &= \left(1-\frac{3}{5}l, 0, 1-\frac{1}{5}l\right)\end{aligned}$$

と表せる。点Eは $xy$ 平面上にあるから、

$$1-\frac{1}{5}l=0 \Leftrightarrow l=5$$

である。よって、 $\overrightarrow{OE}=(-2, 0, 0)$ であるから、点Eの座標は $(-2, 0, 0)$ である。

(答) E $(-2, 0, 0)$

(2)

点Pの $y$ 座標は正であるから、 $y=\sqrt{1-p^2}$ である。点Qは直線EP上の点であるから、実数 $m$ を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= (1-m)\overrightarrow{OE} + m\overrightarrow{OP} \\ &= (-2(1-m)+pm, m\sqrt{1-p^2}, 0)\end{aligned}$$

と表せる。点Qは円C上にあるから、

$$\begin{aligned}\{-2(1-m)+pm\}^2 + \{m\sqrt{1-p^2}\}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (4p+5)m^2 - 4(p+2)m + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-1)\{(4p+5)m-3\} &= 0 \\ \Leftrightarrow m=1, \frac{3}{4p+5}\end{aligned}$$

である。点Qは点Pと異なる点であるから、 $m \neq 1$ である。いま $p \neq -\frac{1}{2}$ であるから、

$$\frac{3}{4p+5} \neq 1 \text{ より, } m = \frac{3}{4p+5} \text{ である。したがって、点Qの } y \text{ 座標は } \frac{3\sqrt{1-p^2}}{4p+5} \text{ である。}$$

(答)  $\frac{3\sqrt{1-p^2}}{4p+5}$

(3)

点Fの $x$ 座標を $q$ とすると、 $y$ 座標の値が正であることから、F $(q, \sqrt{1-q^2}, 0)$ と表せる。また、

点Gの座標を $(r, s, 0)$ とおくと、

$$r^2 + s^2 = 1 \quad \cdots \text{①}$$

が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} &= t\overrightarrow{AF} \\ \Leftrightarrow \left(r-\frac{2}{5}, s, -\frac{4}{5}\right) &= (t(q-1), t\sqrt{1-q^2}, -t)\end{aligned}$$

であり、これを解くと

$$t = \frac{4}{5}, r = \frac{4}{5}q - \frac{2}{5}, s = \frac{4}{5}\sqrt{1-q^2}$$

となる。これを①に代入して、

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{5}q - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\sqrt{1-q^2}\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{5} - \frac{16}{25}q &= 1 \\ \Leftrightarrow q &= -\frac{5}{16}\end{aligned}$$

である。したがって、点Fの $x$ 座標の値は $-\frac{5}{16}$ である。

(答)  $-\frac{5}{16}$

(4)

題意より、5点A, B, P, R, Uはすべて同一平面上に存在する。また、3点A, B, Eが一直線上にあることから、この平面は点Eを通る。よって、3点E, P, Rは、6点A, B, E, P, R, Uを含む平面と、 $xy$ 平面の両方に存在するから、この2つの平面の交線上に存在する。これより、点Rは円C上と、直線EP上に存在するから、点Qに等しいことがわかる。したがって、(2)より点Rの座標は、

$$\left(-2\left(1-\frac{3}{4p+5}\right) + \frac{3p}{4p+5}, \frac{3\sqrt{1-p^2}}{4p+5}, 0\right) = \left(-\frac{5p+4}{4p+5}, \frac{3\sqrt{1-p^2}}{4p+5}, 0\right)$$

である。点Uは、直線AP上にあるから、実数 $u$ を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OU} &= (1-u)\overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{OP} \\ &= \left(1+(p-1)u, u\sqrt{1-p^2}, 1-u\right)\end{aligned}$$

と表せる。また、点Uは、直線BR上にあるから、実数 $v$ を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OU} &= (1-v)\overrightarrow{OB} + v\overrightarrow{OR} \\ &= \left(\frac{2}{5} + \left(-\frac{5p+4}{4p+5} - \frac{2}{5}\right)v, \frac{3\sqrt{1-p^2}}{4p+5}v, \frac{4}{5}(1-v)\right)\end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $y, z$ 成分を比較すると、

$$\begin{aligned}\begin{cases} u\sqrt{1-p^2} = \frac{3\sqrt{1-p^2}}{4p+5}v \\ 1-u = \frac{4}{5}(1-v) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{3}{4p+5}v \\ 5u - 4v = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{3}{4p+5}v \\ \left(\frac{15}{4p+5} - 4\right)v = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{3}{4p+5}v \\ -\frac{16p+5}{4p+5}v = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

となる。ここで、点Pは点Fと異なる点であるから、 $p \neq -\frac{5}{16} \Leftrightarrow 16p+5 \neq 0$ であり、

$$(u, v) = \left(-\frac{3}{16p+5}, -\frac{4p+5}{16p+5}\right)$$

となる。したがって、点Uの $y$ 座標は、

$$\frac{3\sqrt{1-p^2}}{4p+5} \cdot \left(-\frac{4p+5}{16p+5}\right) = -\frac{3\sqrt{1-p^2}}{16p+5}$$

である。

(答) 点Rの $y$ 座標:  $\frac{3\sqrt{1-p^2}}{4p+5}$ , 点Uの $y$ 座標:  $-\frac{3\sqrt{1-p^2}}{16p+5}$



[Ⅳ]

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{x^2}(\log x)^{-n} + \frac{1}{x} \cdot (-n)(\log x)^{-n-1} \cdot \frac{1}{x} \\&= -\frac{\log x + n}{x^2(\log x)^{n+1}}\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\&\Leftrightarrow \log x + n = 0 \\&\therefore x = e^{-n}\end{aligned}$$

となるから、 $a_n = e^{-n}$ であり、

$$f(a_n) = \frac{1}{e^{-n}(\log e^{-n})^n} = \left(-\frac{e}{n}\right)^n$$

となる。また、 $0 < x < 1$  のとき  $\log x < 0$  であり、 $n$  は 9 以上の自然数であることから、 $0 < e^{-n} < 1$  であることを踏まえると、 $f(x)$  の増減は  $n$  の偶奇で以下のように場合分けされる。

[1]  $n$  が偶数のとき、

$(\log x)^{n+1} < 0$  であるから、増減表は以下のようになる。

|         |   |     |          |     |   |
|---------|---|-----|----------|-----|---|
| $x$     | 0 | ... | $e^{-n}$ | ... | 1 |
| $f'(x)$ |   |     | -        | +   |   |
| $f(x)$  |   |     | 極小       | ↗   |   |

したがって、 $f(a_n)$  は極小値である。

[2]  $n$  が奇数のとき、

$(\log x)^{n+1} > 0$  であるから、増減表は以下のようになる。

|         |   |     |          |     |   |
|---------|---|-----|----------|-----|---|
| $x$     | 0 | ... | $e^{-n}$ | ... | 1 |
| $f'(x)$ |   |     | +        | -   |   |
| $f(x)$  |   |     | ↗        | 極大  | ↘ |

したがって、 $f(a_n)$  は極大値である。

以上より、 $f(a_n)$  は  $n$  が偶数のとき極小値、 $n$  が奇数のとき極大値となる。

(答)  $a_n = e^{-n}$ 、 $f(a_n) = \left(-\frac{e}{n}\right)^n$ 、 $f(a_n)$  は  $n$  が偶数のとき極小値、 $n$  が奇数のとき極大値

(2)

$n \geq 9$  であることに注意すると、

$$\begin{aligned}f''(x) &= -\frac{x(\log x)^{n+1} - (\log x + n)\{2x(\log x)^{n+1} + x(n+1)(\log x)^n\}}{x^4(\log x)^{2n+2}} \\&= -\frac{\log x - (\log x + n)(2\log x + n + 1)}{x^3(\log x)^{n+2}} \\&= \frac{2(\log x)^2 + 3n\log x + n(n+1)}{x^3(\log x)^{n+2}} \\&= \frac{2}{x^3(\log x)^{n+2}} \left\{ \log x - \frac{-3n - \sqrt{n(n-8)}}{4} \right\} \left\{ \log x - \frac{-3n + \sqrt{n(n-8)}}{4} \right\}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{-3n - \sqrt{n(n-8)}}{4} < \frac{-3n + \sqrt{n(n-8)}}{4} < \frac{-3n + n}{4} = -\frac{1}{2}n < 0$$

であるから、 $f''(x) = 0$  は  $0 < x < 1$  に相異なる 2 つの実数解をもち、かつその前後で  $f''(x)$  の符号が変わることがわかる。したがって、 $f(x)$  は 2 つの変曲点をもつことが示された。

(証明終)

また、 $b_n < c_n$  であることから、

$$\begin{aligned}\log b_n &= \frac{-3n - \sqrt{n(n-8)}}{4} \\&\therefore b_n = e^{\frac{-3n - \sqrt{n(n-8)}}{4}}\end{aligned}$$

である。

(答)  $b_n = e^{\frac{-3n - \sqrt{n(n-8)}}{4}}$

(3)

(1), (2)より

$$\frac{\log b_n}{\log a_n} = \frac{\frac{-3n - \sqrt{n(n-8)}}{4}}{-n} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{8}{n}}$$

である。ここで、

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{8}{n}}\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{8}{n}}$$

であり、

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{8}{n}}\right)^2 = \frac{1}{n^2} > 0$$

より、 $\frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{8}{n}} < \frac{1}{4} - \frac{1}{n}$  となるから、 $\frac{\log b_n}{\log a_n} < 1 - \frac{1}{n}$  が成り立つ。また、

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{8}{n}}\right) - \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{8}{n}} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right)$$

であり、

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{8}{n}}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{n^2} + \frac{25}{n^4} - \frac{1}{2n} - \frac{5}{2n^2} + \frac{10}{n^3}\right) \\&= \frac{3}{2n^2} - \frac{10}{n^3} - \frac{25}{n^4} \\&= \frac{3}{2n^4} \left(n^2 - \frac{20}{3}n - \frac{50}{3}\right) \\&= \frac{3}{2n^4} \left\{ \left(n - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{250}{9} \right\}\end{aligned}$$

となる。 $n \geq 9$  のとき、

$$\left(n - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{250}{9} \geq \left(9 - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{250}{9} = \frac{39}{9} > 0$$

であり、 $\frac{1}{4} - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} < \frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{8}{n}}$  となるから、 $1 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} < \frac{\log b_n}{\log a_n}$  が成り立つ。以上より、

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} \leq \frac{\log b_n}{\log a_n} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \frac{1}{(\log x)^n} (\log x)' dx \\&= -\frac{1}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

である。

(答)  $\int f(x) dx = -\frac{1}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$

(5)

(3)より、

$$\begin{aligned}\frac{\log b_n}{\log a_n} &< 1 \\&\Leftrightarrow \log b_n > \log a_n \quad (\because \log a_n < 0) \\&\Leftrightarrow b_n > a_n\end{aligned}$$

である。 $n$  が偶数のとき、 $0 < x < 1$  において  $f(x) > 0$  であるから、

$$\begin{aligned}n^n S_n &= n^n \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx \\&= n^n \left[ -\frac{1}{(n-1)(\log x)^{n-1}} \right]_{a_n}^{b_n} \\&= \frac{n^n}{n-1} \left\{ \frac{1}{(\log a_n)^{n-1}} - \frac{1}{(\log b_n)^{n-1}} \right\} \\&= \frac{n^n}{(n-1)(\log a_n)^{n-1}} \left\{ 1 - \left( \frac{\log a_n}{\log b_n} \right)^{n-1} \right\} \\&= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{n-1} \left\{ 1 - \left( \frac{\log a_n}{\log b_n} \right)^{n-1} \right\} \\&= \frac{n}{n-1} \left\{ \left( \frac{\log a_n}{\log b_n} \right)^{n-1} - 1 \right\}\end{aligned}$$

となる。また、 $n$  が奇数のとき、 $0 < x < 1$  において  $f(x) < 0$  であるから

$$\begin{aligned}n^n S_n &= -n^n \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx \\&= -\frac{n^n}{n-1} \left\{ \frac{1}{(\log a_n)^{n-1}} - \frac{1}{(\log b_n)^{n-1}} \right\} \\&= (-1)^n \cdot \frac{n}{n-1} \left\{ 1 - \left( \frac{\log a_n}{\log b_n} \right)^{n-1} \right\} \\&= \frac{n}{n-1} \left\{ \left( \frac{\log a_n}{\log b_n} \right)^{n-1} - 1 \right\}\end{aligned}$$

と同じ値を得る。ここで、(3)より

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} &< \frac{\log b_n}{\log a_n} < 1 - \frac{1}{n} \\&\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right)^{n-1} < \left(\frac{\log b_n}{\log a_n}\right)^{n-1} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

であり、ネイピア数の定義により  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  であることを用いると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n} \right\}^{\frac{n-1}{n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

である。また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{-\frac{n^2}{n+5}}\right)^{\frac{n^2}{n+5}} \right\}^{\frac{(n+5)(n-1)}{n^2}}$$

であり、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n^2}{n+5}\right) &= -\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{(n+5)(n-1)}{n^2} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\left(1 + \frac{5}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\} = -1\end{aligned}$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right)^{n-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

となる。したがって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\log b_n}{\log a_n} \right)^{n-1} = \frac{1}{e}$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^n S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} \left\{ \left( \frac{\log a_n}{\log b_n} \right)^{n-1} - 1 \right\} = 1 \cdot (e-1) = e-1$$

となる。

(答)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n S_n = e-1$