

【I】

【解答】

(1)	$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ウ}}$	$\boxed{\text{エ}}$	$\boxed{\text{オ}}$
	$-\frac{1}{4}t^3+t^2-t+\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{27}$	2	$t^2\sqrt{4t^2+1}$
(2)	$\boxed{\text{カ}}$	$\boxed{\text{キ}}$	$\boxed{\text{ク}}$	$\boxed{\text{ケ}}$	$\boxed{\text{コ}}$
	0	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{2}{3}$

【解説】

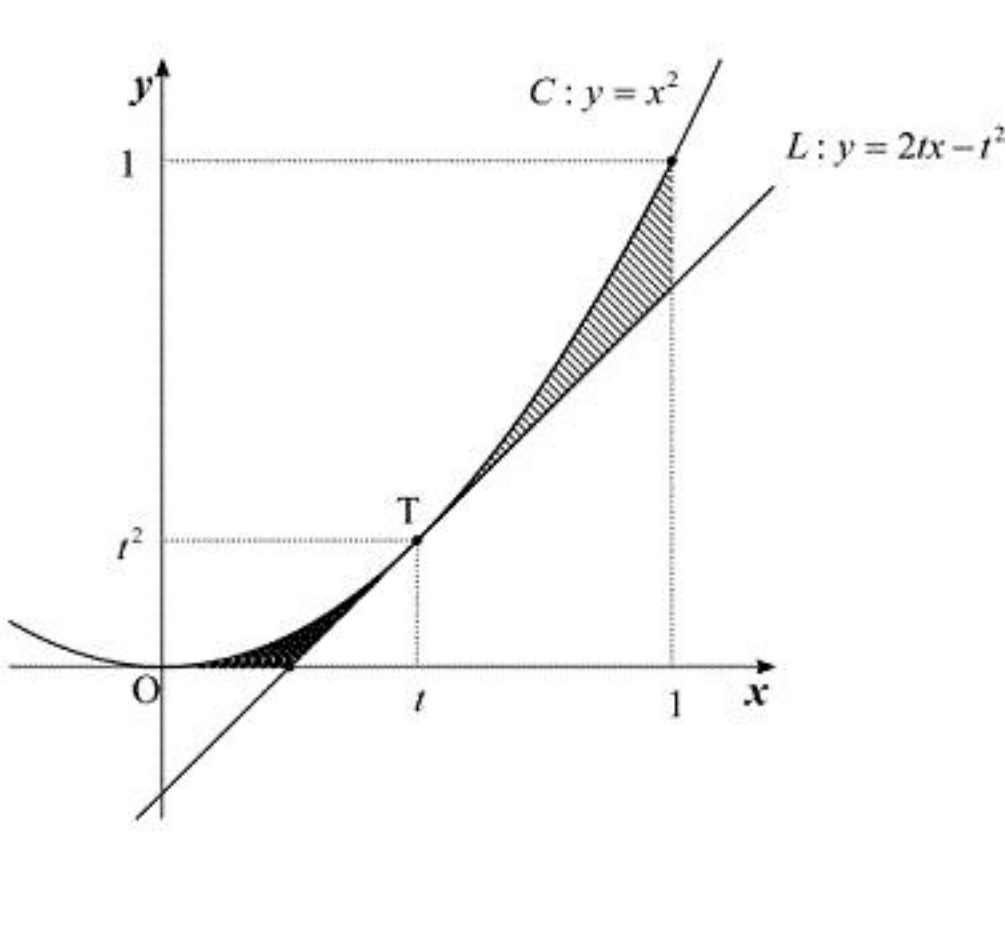
(1)

$y=x^2$ のとき $y'=2x$ より、直線 L の方程式は、

$$y-t^2=2t(x-t)$$

$$\Leftrightarrow y=2tx-t^2$$

となる。放物線 C 、直線 L を図示すると以下ようになる。



ここで、直線 L と x 軸との交点は、

$$0=2tx-t^2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}t$$

より、 $\left(\frac{1}{2}t,0\right)$ である。 S_1 は C と x 軸と $x=t$ で囲まれた部分の面積から、 L と x 軸と $x=t$ で

囲まれた部分の面積を引くことで求まるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^t x^2 dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} t \cdot t^2 \\ &= \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{4} t^3 \\ &= \frac{1}{12} t^3 \end{aligned}$$

である。また、 S_2 を計算すると、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_t^1 \{x^2 - (2tx - t^2)\} dx \\ &= \int_t^1 (x-t)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (x-t)^3 \right]_t^1 \\ &= \frac{1}{3} (1-t)^3 \end{aligned}$$

となる。したがって、 S は、

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \frac{1}{12} t^3 + \frac{1}{3} (1-t)^3 \\ &= -\frac{1}{4} t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{3}{4} t^2 + 2t - 1 = -\frac{1}{4} (3t-2)(t-2)$$

であることから、 $0 < t < 1$ における増減表は以下ようになる。

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$\frac{dS}{dt}$	$\searrow$	-	0	+	$\searrow$
S	$\searrow$	$\searrow$	$\frac{1}{27}$	$\nearrow$	$\searrow$

したがって、 S は $t=\frac{2}{3}$ で最小値 $\frac{1}{27}$ をとる。ここで、 $t=\frac{2}{3}$ のときの S_1, S_2 を求めると、

$$S_1 = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{81}$$

$$S_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{81}$$

であるから、 $\frac{S_1}{S_2} = 2$ である。次に円 O について、直線 L が円 O の接線となるため、円 O の中

心は、点 T を通り直線 L に垂直な直線上に存在する。この直線の傾きは $-\frac{1}{2t}$ であるから、方

程式は、

$$y = -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$$

と表すことができる。円 O の中心は x 軸上にあるから、

$$0 = -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2t^3 + t$$

となり、座標は $(2t^3+t, 0)$ である。したがって円 O の半径は、

$$\sqrt{\{(2t^3+t)-t\}^2 + \{0-t^2\}^2} = t^2\sqrt{4t^2+1}$$

である。

(2)

平面 α は3点 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 1, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$ を通るため、平面 α の方程式は $x+y+z=1$ である。こ

こで、点 H は平面 α 上に存在するため、実数 p, q を用いて $H(p, q, 1-p-q)$ と表される。また、

直線 DH と平面 α は垂直であり、

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

が成立する。成分を代入して計算すると、

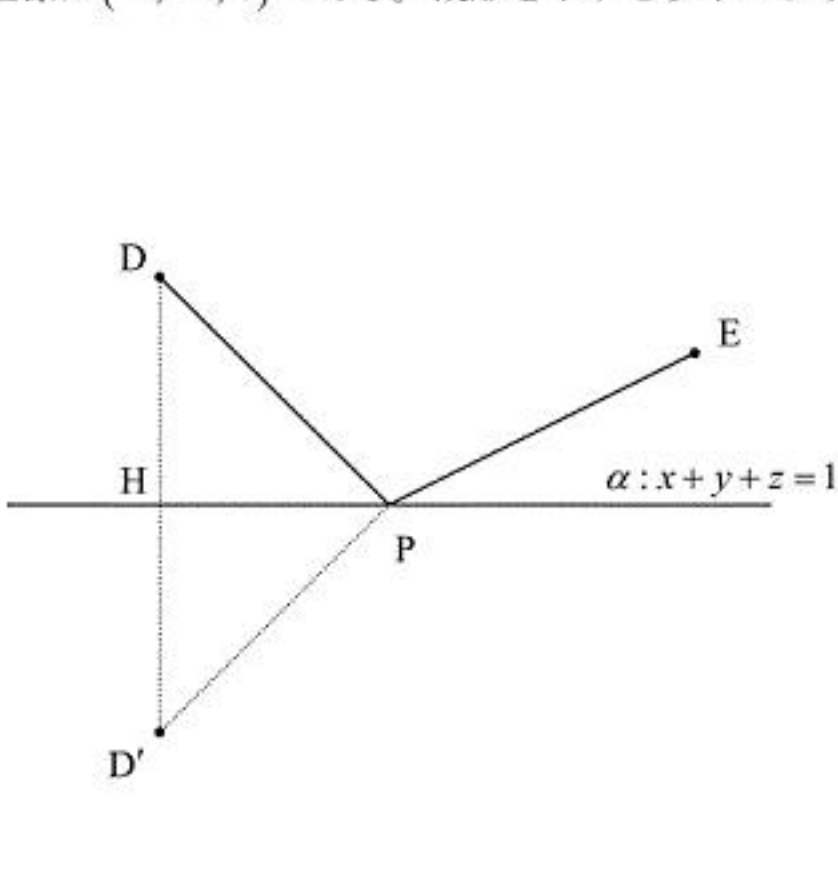
$$\begin{aligned} \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p-1 \\ q-1 \\ -p-q-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow -p+1+q-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= q \\ \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p-1 \\ q-1 \\ -p-q-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow -p+1-p-q-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= -\frac{1}{2}q \end{aligned}$$

となる。 $p=q$ かつ $p=-\frac{1}{2}q$ を解くと $p=q=0$ であるから、点 H の座標は $(0, 0, 1)$ であり、 x

座標は0である。次に、点 D を平面 α に関して対称移動した点を点 D' とすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DD'} &= 2\overrightarrow{DH} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OD'} &= \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DH} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OD'} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OD'} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるため、点 D' の座標は $(-1, -1, 0)$ である。概形を示すと以下ようになる。



ここで、 $DH=D'H$ 、 $\angle DHP=\angle D'HP=90^\circ$ 、 PH は共通より、 $\triangle DHP \equiv \triangle D'HP$ であるから

$DP=D'P$ が成立する。すなわち、

$$DP+PE=D'P+PE$$

であり、 $D'P+PE$ が最小となるのは、3点 D', P, E が同一直線上に存在するときである。したが

って、

$$D'E = \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2 + (1+0)^2} = 3$$

となるため、 $DP+PE$ の最小値は3である。また、このとき実数 k を用いて $\overrightarrow{D'P} = k\overrightarrow{D'E}$ が成立

するため、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD'} + k\overrightarrow{D'E} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k-1 \\ 2k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

となる。点 P は平面 α 上の点であるから、

$$(2k-1) + (2k-1) + k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{5}$$

となり、点 P の座標は $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$ であり、 y 座標は $\frac{1}{5}$ である。次に、 DP^2+PE^2 が最小となると

きを考える。実数 u, v を用いて $P(u, v, 1-u-v)$ とおくと、

$$\begin{aligned} DP^2+PE^2 &= (u-1)^2 + (v-1)^2 + (1-u-v-2)^2 + (u-1)^2 + (v-1)^2 + (1-u-v-1)^2 \\ &= 2(u-1)^2 + 2(v-1)^2 + \{(u+v)+1\}^2 + (u+v)^2 \\ &= 4u^2 + (4v-2)u + 4v^2 - 2v + 5 \\ &= 4\left(u + \frac{2v-1}{4}\right)^2 + 4v^2 - 2v + 5 - \frac{(2v-1)^2}{4} \\ &= 4\left(u + \frac{2v-1}{4}\right)^2 + 3v^2 - v + \frac{19}{4} \\ &= 4\left(u + \frac{2v-1}{4}\right)^2 + 3\left(v - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{14}{3} \end{aligned}$$

であるから、これが最小となるとき、

$$\begin{cases} u + \frac{2v-1}{4} = 0 \\ v = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (u, v) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

であり、最小値は $\frac{14}{3}$ である。また、このとき点 P の z 座標は、 $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ である。

〔Ⅱ〕

(1)

$b_1 = a_2 - a_1 = (-2) - (-5) = 3$ である。 $n \geq 2$ において、

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= (2a_n - a_{n-1} + 2) - a_n \\ &= a_n - a_{n-1} + 2 \\ &= b_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

であるから、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 3$ 、公差 2 の等差数列である。よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は、

$$b_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1$$

である。

(答) $b_n = 2n+1$

(2)

$a_{n+1} - a_n = 2n+1$ であるから、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) \\ &= -5 + \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n + (n-1) \right\} \\ &= n^2 - 6 \end{aligned}$$

である。 $n=1$ のときもこれを満たすから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = n^2 - 6$ である。

(答) $a_n = n^2 - 6$

(3)

a_n が 3 で割り切れるとき、整数 k を用いて、 $a_n = 3k$ と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} a_n &= 3k \\ \Leftrightarrow n^2 - 6 &= 3k \\ \Leftrightarrow n^2 &= 3(k+2) \end{aligned}$$

となり、 n^2 は 3 で割り切れることがわかる。よって、 n^2 は 3 を素因数にもつから、 n も 3 を素因数にもつ。したがって、 a_n が 3 で割り切れるとき、 n を 3 で割った余りは 0 である。

(答) 0

(4)

任意の自然数 n は、整数 l と整数 m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$) を用いて、 $n = 7l + m$ と表せる。以下、 m の値で場合分けして考える。

[1] $m = 0$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= (7l)^2 - 6 \\ &= 7(7l^2 - 1) + 1 \end{aligned}$$

となるから、 a_n は 7 で割り切れない。

[2] $m = \pm 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= (7l \pm 1)^2 - 6 \\ &= (49l^2 \pm 14l + 1) - 6 \\ &= 7(7l^2 \pm 2l - 1) + 2 \end{aligned}$$

となるから、 a_n は 7 で割り切れない。

[3] $m = \pm 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= (7l \pm 2)^2 - 6 \\ &= (49l^2 \pm 28l + 4) - 6 \\ &= 7(7l^2 \pm 4l - 1) + 5 \end{aligned}$$

となるから、 a_n は 7 で割り切れない。

[4] $m = \pm 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= (7l \pm 3)^2 - 6 \\ &= (49l^2 \pm 42l + 9) - 6 \\ &= 7(7l^2 \pm 6l) + 3 \end{aligned}$$

となるから、 a_n は 7 で割り切れない。

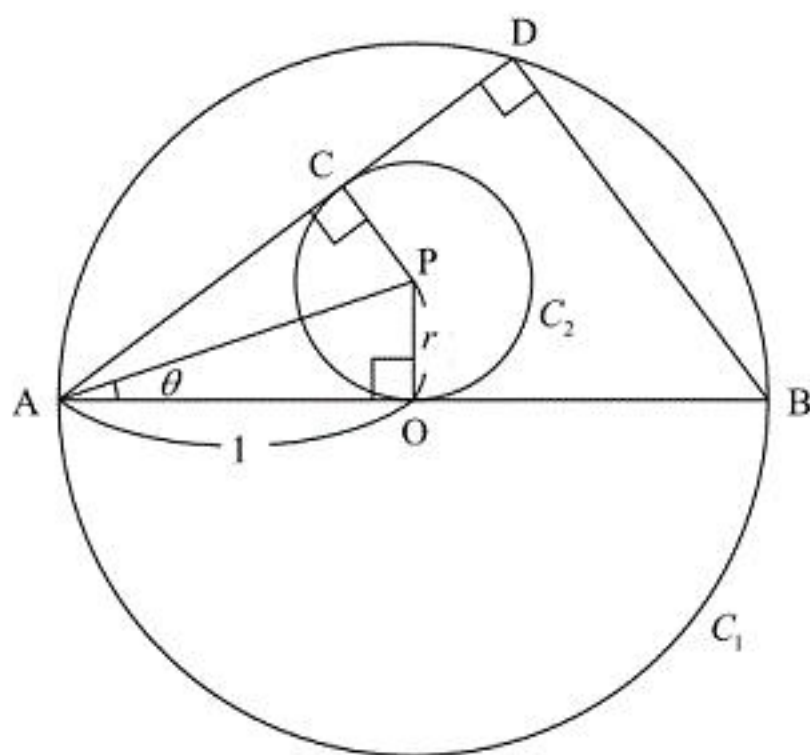
以上[1]~[4]より、どの項 a_n も 7 で割り切れないことが示された。

(証明終)

【Ⅲ】

(1)

円 C_1 , C_2 および点 O , A , B , C , D , P は以下のように図示される。



上図より、直角三角形 OAP において三平方の定理より

$$AP = \sqrt{OA^2 + OP^2} = \sqrt{1 + r^2}$$

である。よって、

$$\cos \theta = \frac{OA}{AP} = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}}$$

と求まる。

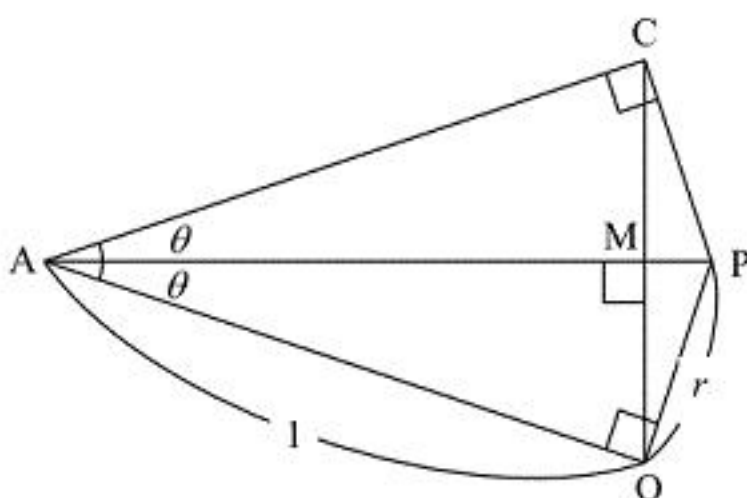
$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}}$$

(2)

(1)と同様にして、 $\sin \theta$ は

$$\sin \theta = \frac{OP}{AP} = \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}}$$

と求まる。ここで $\angle AOP = \angle ACP = 90^\circ$ 、 $OP = CP = r$ であり、辺 AP を共通に持つことから $\triangle OAP \cong \triangle CAP$ が成り立つ。したがって、線分 AP と線分 OC の交点を M とおくと、四角形 $OPCA$ および点 M は以下のように図示される。



上図より、 $OM = CM$ かつ $AP \perp OC$ であることがわかる。したがって、

$$\begin{aligned} OC &= 2OM \\ &= 2OA \sin \theta \\ &= \frac{2r}{\sqrt{1 + r^2}} \end{aligned}$$

である。また、円周角の定理より $\angle ADB = 90^\circ$ であるから、直角三角形 ABD において

$$\begin{aligned} AD &= AB \cos \angle BAD \\ &= 2 \cos 2\theta \\ &= 2(2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= 2\left(2 \cdot \frac{1}{1 + r^2} - 1\right) \\ &= \frac{2(1 - r^2)}{1 + r^2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad OC = \frac{2r}{\sqrt{1 + r^2}}, \quad AD = \frac{2(1 - r^2)}{1 + r^2}$$

(3)

(2)と同様にして、直角三角形 ABD において

$$\begin{aligned} BD &= AB \sin \angle BAD \\ &= 2 \sin 2\theta \\ &= 4 \sin \theta \cos \theta \\ &= 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}} \\ &= \frac{4r}{1 + r^2} \end{aligned}$$

である。よって、 $\triangle ABD$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BD \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2(1 - r^2)}{1 + r^2} \cdot \frac{4r}{1 + r^2} \\ &= \frac{4r(1 - r^2)}{(1 + r^2)^2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{4r(1 - r^2)}{(1 + r^2)^2}$$

(4)

R を用いて S を表すと $S = \frac{1}{2}(AB + BD + AD)R$ である。したがって、(3)の結果より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(AB + BD + AD)R \\ \Leftrightarrow \frac{4r(1 - r^2)}{(1 + r^2)^2} &= \frac{1}{2} \left\{ 2 + \frac{4r}{1 + r^2} + \frac{2(1 - r^2)}{1 + r^2} \right\} R \\ \Leftrightarrow \frac{4r(1 + r)(1 - r)}{(1 + r^2)^2} &= \frac{2(1 + r)}{1 + r^2} R \\ \therefore R &= \frac{2r(1 - r)}{1 + r^2} \quad (\because 1 + r \neq 0) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad R = \frac{2r(1 - r)}{1 + r^2}$$

(5)

円 C_2 と円 C_3 が一致するための必要条件は $R = r$ である。これより、(4)の結果を用いて

$$\begin{aligned} R &= r \\ \Leftrightarrow \frac{2r(1 - r)}{1 + r^2} &= r \\ \Leftrightarrow 2(1 - r) &= 1 + r^2 \quad (\because r \neq 0) \\ \Leftrightarrow r^2 + 2r - 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となることがわかる。ここで、円 C_2 の直径は円 C_1 の半径より小さいことから

$$0 < 2r < 1 \Leftrightarrow 0 < r < \frac{1}{2}$$

である。したがって、条件を満たす r の値は①より

$$r = \sqrt{2} - 1$$

となる。このとき、①より

$$\begin{aligned} r^2 + 2r - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(1 - r^2) &= 4r \\ \Leftrightarrow \frac{2(1 - r^2)}{1 + r^2} &= \frac{4r}{1 + r^2} \\ \Leftrightarrow AD &= BD \end{aligned}$$

が成立する。したがって、 $\triangle ABD$ は $AD = BD$ の直角二等辺三角形となるため、直線 OD に関して対称となる。つまり円 C_2 は $\triangle ABD$ に内接する。一般に三角形の内接円は一意に定まることから、円 C_2 と円 C_3 が確かに一致していることがわかる。よって、求める解は $r = \sqrt{2} - 1$ である。

$$(\text{答}) \quad r = \sqrt{2} - 1$$