

2020年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)のそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 氏名の記入欄は、解答用紙(一)、(二)の表面にそれぞれ1か所ある。合計2か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (4) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (5) 問題紙の本文は2ページである。
- (6) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (7) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (8) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (9) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余 白

〔Ⅰ〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

- (1) n を 5 以上の自然数とする. 4 つの文字 a, b, c, d から重複を許して n 個を選んで左から 1 列に並べ、 n 個の文字の列を作る. ただし、隣り合う文字は必ず異なるものとする. まず $n = 5$, つまり 5 個の文字の列を考えたとき、 b, c, d をすべて 1 つずつ含み a から始まり a で終わる文字の列は ア 通りあり、 b を 1 つだけ含み a から始まり a で終わる文字の列は イ 通りある. 次に n 個の文字の列を考えたとき、 d を 1 つも含まない a から始まる文字の列は ウ 通り、 d は 1 つも含まないが b, c をいずれも 1 つ以上含む a から始まる文字の列は エ 通り、 b, c, d をすべて 1 つ以上含む a から始まる文字の列は オ 通りある.
- (2) a, b を正の実数、 i を虚数単位、 $P(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - 2ax + 4$ とし、方程式 $P(x) = 0$ が複素数 $\alpha = 1 + i$ を解にもつとする. b を a で表すと $b =$ カ である. また、 $\alpha = 1 + i$ は、実数係数の 2 次式 $Q(x) = x^2 - 2x +$ キ に対して、方程式 $Q(x) = 0$ の解となる. このとき、 $P(x) = Q(x)R(x)$ である. ここで $R(x)$ は x についての 2 次式で、 x の 1 次の項の係数は ク である. これより、 $P(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲を $a > a_0$ とすると、 $a_0 =$ ケ である. さらに、 $a > a_0$ のとき、複素数の範囲で考えた $P(x) = 0$ の α 以外の解を β, γ, δ とすると、複素数平面上の 4 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(\delta)$ のうちのいずれかの 3 点が一直線上にあるのは $a =$ コ のときである.

〔Ⅱ〕 $f(x) = 1 + (e - 1) \log x$ ($x > 0$) とし、曲線 $y = f(x)$ を C とする. ただし、 e は自然対数の底である. 次の問いに答えよ.

- (1) $f(1), f(e)$ を求めよ.
- (2) $g(x) = f(x) - x$ とする. 関数 $y = g(x)$ の増減を調べ、その極値を求めよ. さらに、 $g(x) \geq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ.
- (3) $f(x)$ の不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ.
- (4) C と直線 $y = x$ によって囲まれた部分の面積 S を求めよ.

〔Ⅲ〕 xyz 空間の 4 点 A, B, C, D はいずれも原点を中心とするある球面 S 上にあり，四面体 $ABCD$ は正四面体であるとする．さらに，点 A の座標は $(1, 1, 4)$ ，点 B は xy 平面上にあり，点 C の x 座標は正である．このとき，次の問いに答えよ．

- (1) 球面 S の半径を求めよ．
- (2) 正四面体 $ABCD$ の一辺の長さを a とする．点 A から平面 BCD に垂線 AH を下ろす．このとき，線分 AH の長さを a を用いて表せ．
- (3) 正四面体 $ABCD$ の一辺の長さ a を求めよ．
- (4) 点 B の座標を求めよ．
- (5) 点 C の座標を求めよ．

〔Ⅳ〕 r は $0 < r < 1$ を満たす実数とする．次の問いに答えよ．

(1) $r^{-x^2} \frac{d}{dx}(x^2 r^{x^2})$ を求めよ．

(2) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} |x| (1 + x^2 \log r) r^{x^2} dx$ を求めよ．

(3) 和 $\sum_{i=1}^n i r^{i-1}$ を求めよ．

- (4) n を自然数として，定数 a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) の値は， $-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \dots, -\sqrt{n}$ のいずれかであり，互いに異なるように定めるものとする．また，定数 b_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) の値は， $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}$ のいずれかであり，互いに異なるように定めるものとする．この定数 a_i, b_i を用いて， $T_n = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |x| (1 + \sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx$ とおく．このとき， T_n は a_i と b_i の定め方によらずに n と r だけで定まることを示し， T_n を n と r の式で表せ．さらに， $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を計算せよ．ただし，必要ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} n r^n = 0$ であることを証明なしに用いてよい．

以下余白

2

2



2

2