

【I】

【解答】

ア	7	イ	$\frac{17}{2}$	ウ	3
エ	10	オ	15	カ	6
キ	7	ク	69	ケ	6
				コ	105

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}x^2-6x+5 &> 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-5) &> 0 \\ \therefore x < 1, 5 < x\end{aligned}$$

であることより

$$f(x)=\begin{cases}-x+5-(x^2-6x+5)(x<1, 5<x) \\ -x+5+(x^2-6x+5)(1\leq x\leq 5)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}-x^2+5x(x<1, 5<x) \\ x^2-7x+10(1\leq x\leq 5)\end{cases}$$

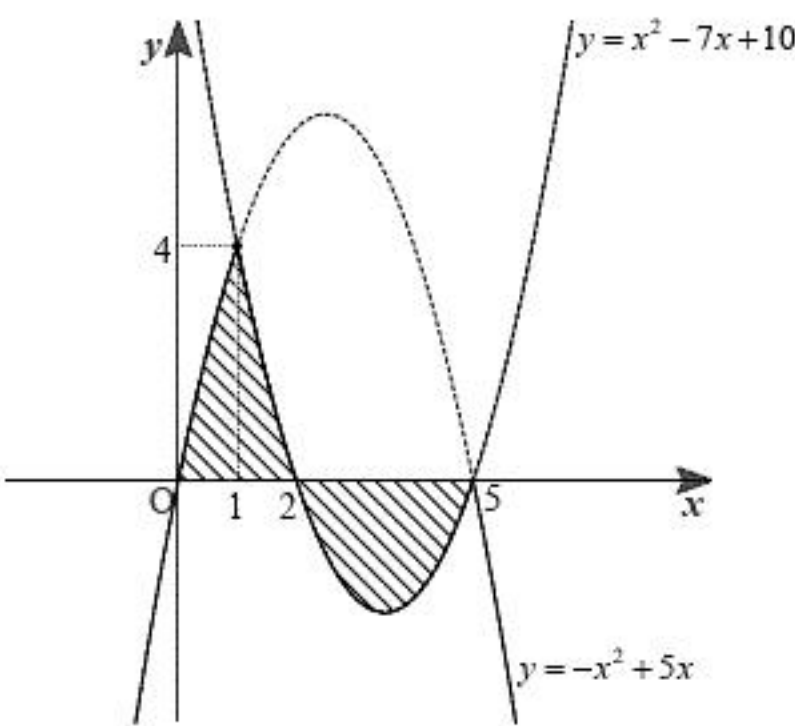
となる。ここで $f(x)=0$ となるのは

$$\begin{aligned}-x^2+5x &= 0 (x<1, 5<x) \\ \therefore x &= 0 \\ x^2-7x+10 &= 0 (1\leq x\leq 5) \\ \therefore x &= 2, 5\end{aligned}$$

のときである。よって $f(x)=0$ を満たす x の値の和は

$$0+2+5=7$$

となる。また、 $y=f(x)$ は下図のようになる。



問題文より求める面積は上図の斜線部の面積である。よって求める面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 (-x^2+5x) dx + \int_1^2 (x^2-7x+10) dx + \int_2^5 \{-(x^2-7x+10)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 10x\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 10x\right]_2^5 \\ &= \frac{13}{6} + \frac{11}{6} + \frac{9}{2} \\ &= \frac{17}{2}\end{aligned}$$

となる。

$\triangle ABP$ を辺 AB を底辺にして考える。 $1\leq t\leq 5$ であるから、 P はその y 座標が

$$f(t)=t^2-7t+10$$

を満たしながら動く。三角形の高さが最大になるとき面積 $S(t)$ は最大となる。その高さは点

P を通り AB に平行な直線と AB との距離であるから、高さが最大になるのは点 P を通り AB

に平行な直線が $y=x^2-7x+10$ ($1\leq x\leq 5$) に接するときである。 AB の傾きは -1 であるから

点 P を通り AB に平行な直線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= -(x-t)+t^2-7t+10 \\ \therefore y &= -x+t^2-6t+10\end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}x^2-7x+10 &= -x+t^2-6t+10 \\ \Leftrightarrow x^2-6x-t^2+6t &= 0\end{aligned}$$

より上の二次方程式の判別式を D とすると $D=0$ になるとき接する。

$$\begin{aligned}D &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{D}{4} &= (-3)^2 - (-t^2+6t) = 0 \\ \Leftrightarrow t^2-6t+9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-3)^2 &= 0 \\ \therefore t &= 3\end{aligned}$$

より求める t の値は $t=3$ である ($1\leq t\leq 5$ を満たす)。そのとき $P(3, -2)$ であり

$$AB: y = -x+6$$

であるから P と AB との距離 d は、点と直線の距離の公式より

$$d = \frac{|3-2-6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

となる。よって求める面積の値は

$$\begin{aligned}S(3) &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(5-1)^2 + (1-5)^2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ &= 10\end{aligned}$$

である。

(2)

2)

三角形の成立条件

$$|a-b| < c < a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

に注意すると

$a=b=1$ のとき、題意を満たす c は存在しない。

$a=b=2$ のとき、題意を満たす c は $c=1$ のみ。

$a=b=3$ のとき、題意を満たす c は $c=1, 2$ のみ。

$a=b=4$ のとき、題意を満たす c は $c=1, 2, 3$ のみ。

$a=b=5$ のとき、題意を満たす c は $c=1, 2, 3, 4$ のみ。

$a=b=6$ のとき、題意を満たす c は $c=1, 2, 3, 4, 5$ のみ。

よって、求める値は

$$1+2+3+4+5=15(\text{通り})$$

である。

3)

2)と同様に $b(=c)$ の値を決めてその時に取りうる a の値の個数を考えると、求める値は

$$1+2+2+1=6(\text{通り})$$

である。

4)

$a>b>c$ かつ $\textcircled{1}$ をみたとす (a, b, c) の組み合わせは

$$(4, 3, 2), (5, 4, 2), (6, 5, 2), (5, 4, 3), (6, 4, 3), (6, 5, 3), (6, 5, 4)$$

であるから、求める値は

$$7(\text{通り})$$

である。

5)

a, b, c の対称性より、 $b=c>a, c=a>b$ になるのは 2)よりそれぞれ 15 通り、

$a=b<c, c=a<b$ になるのは 3)よりそれぞれ 6 通りであることより、二等辺三角形であ

るが正三角形でないものは

$$(15+6) \cdot 3 = 63(\text{通り})$$

である。よってこの結果と 1)より求める値は

$$6+63=69(\text{通り})$$

である。

6)

まず c が最大辺の場合を考える。そのとき

$$a^2+b^2=c^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

$c=1$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす (a, b) は存在しない。

$c=2$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす (a, b) は存在しない。

$c=3$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす (a, b) は存在しない。

$c=4$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす (a, b) は存在しない。

$c=5$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす (a, b) は $(a, b)=(3, 4), (4, 3)$ のみである。

$c=6$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす (a, b) は存在しない。

よって c が最大辺の場合 $\textcircled{2}$ を満たすのは 2 通りのみである。同様に a, b が最大辺の場合

も各々 2 通りしかないから、求める値は

$$2 \cdot 3 = 6(\text{通り})$$

である。

次に三角形ができない場合を考える。ここで全ての辺の大きさが異なる三角形は、4)で a, b, c

の大小関係を入れ替えたものを考えると

$$7 \cdot 3! = 42(\text{通り})$$

であるから、余事象を考えることにより三角形ができない (a, b, c) は

$$6^3 - (69+42) = 105(\text{通り})$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

与条件より

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_2 - 4a_1 = 2 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{1}{4} = -1 \\ a_4 &= 2a_3 - 4a_2 = 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 = -2 \\ a_5 &= 2a_4 - 4a_3 = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) = 0 \\ a_6 &= 2a_5 - 4a_4 = 2 \cdot 0 - 4 \cdot (-2) = 8 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_3 = -1, a_4 = -2, a_5 = 0, a_6 = 8$

(2)

与えられた漸化式より,

$$\begin{aligned} b_{m+1} &= a_{3(m+1)} \\ &= a_{3m+3} \\ &= 2a_{3m+2} - 4a_{3m+1} \\ &= 2(2a_{3m+1} - 4a_{3m}) - 4a_{3m+1} \\ &= -8a_{3m} \\ &= -8b_m \end{aligned}$$

$$\therefore b_{m+1} = -8b_m$$

となる。(1)より $b_1 = a_3 = -1$ であるから

$$b_m = -1 \cdot (-8)^{m-1} = -(-8)^{m-1}$$

である。

(答) $b_{m+1} = -8b_m, b_m = -(-8)^{m-1}$

(3)

$c_m = a_{3m-1}$ とする。(2)と同様に与えられた漸化式より,

$$c_{m+1} = -8c_m$$

となる。与条件より $c_1 = a_2 = 0$ であるから

$$c_m = 0 \cdot (-8)^{m-1} = 0$$

である。ここで与式において $n = 3m - 2$ として考えると

$$\begin{aligned} a_{3m} &= 2a_{3m-1} - 4a_{3m-2} \\ \therefore a_{3m-2} &= -\frac{1}{4}a_{3m} \quad (\because a_{3m-1} = c_m = 0) \end{aligned}$$

となる。よって求める値は

$$\begin{aligned} S_{3M} &= \sum_{n=1}^{3M} a_n \\ &= \sum_{m=1}^M a_{3m-2} + \sum_{m=1}^M a_{3m-1} + \sum_{m=1}^M a_{3m} \\ &= \sum_{m=1}^M \left(-\frac{1}{4}a_{3m} \right) + \sum_{m=1}^M 0 + \sum_{m=1}^M a_{3m} \\ &= \frac{3}{4} \sum_{m=1}^M a_{3m} \\ &= \frac{3}{4} \sum_{m=1}^M b_m \\ &= -\frac{3}{4} \sum_{m=1}^M (-8)^{m-1} \\ &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{1 - (-8)^M}{1 - (-8)} \\ &= \frac{(-8)^M - 1}{12} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{(-8)^M - 1}{12}$

(4)

まず $|a_{3m}| > 2020$ なる最小の m を考える。(2)の結果より

$$|a_{3m}| = |b_m| = \left| -(-8)^{m-1} \right| = 8^{m-1}$$

であるから,

$$\begin{aligned} |a_{3m}| &> 2020 \\ \Leftrightarrow 8^{m-1} &> 2020 \\ \therefore m-1 &\geq 4 \quad (\because m \in \mathbb{N}) \\ \therefore m &\geq 5 \end{aligned}$$

である。同様に $|a_{3m-2}| > 2020$ なる最小の m を考える。

$$a_{3m-2} = -\frac{1}{4}a_{3m} = -\frac{1}{4}b_m = -2 \cdot (-8)^{m-2}$$

であり,

$$|a_{3m-2}| = \left| -2 \cdot (-8)^{m-2} \right| = 2 \cdot 8^{m-2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} |a_{3m-2}| &> 2020 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 8^{m-2} &> 2020 \\ \therefore m-2 &\geq 4 \quad (\because m \in \mathbb{N}) \\ \therefore m &\geq 6 \end{aligned}$$

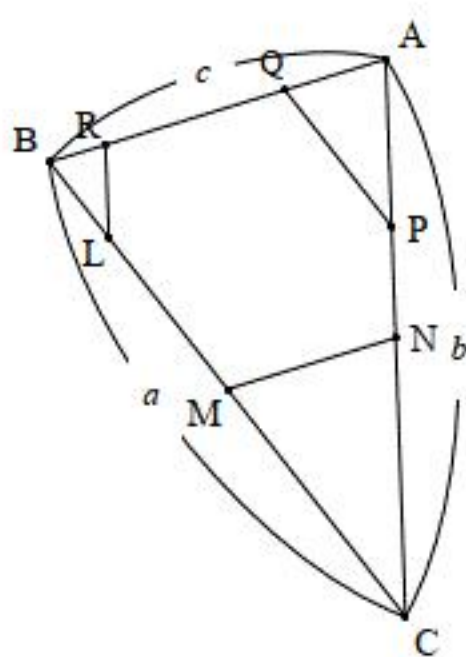
である。よって $a_n > 2020$ を満たす a_n を, この範囲内で順に調べると

$$\begin{aligned} a_{15} &= a_{3 \cdot 5} = -4096 < 2020 \\ a_{18} &= a_{3 \cdot 6} = 32768 > 2020 \\ a_{16} &= a_{3 \cdot 6-2} = -\frac{1}{4}a_{3 \cdot 6} = -8192 < 2020 \\ a_{17} &= 0 < 2020 \end{aligned}$$

であるから, $a_n > 2020$ を満たす n の最小値は18である。

(答) 18

【Ⅲ】



(1)

$\triangle ABC$ の内心をOとする。 $\triangle OAB$ 、 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OCA$ はそれぞれAB、BC、CAを底辺としたとき、高さが内接円の半径 r となる。よって

$$\begin{aligned} S &= \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA \\ &= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \\ &= \frac{1}{2}rk \end{aligned}$$

$$\therefore r = \frac{2S}{k}$$

となる。

(答) $\frac{2S}{k}$

(2)

AからBCに下ろした垂線の長さを h とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah \\ \therefore h &= \frac{2S}{a} \end{aligned}$$

である。また、AからPQに下ろした垂線の長さを d とすると

$$\begin{aligned} d + 2r &= h \\ \therefore d &= h - 2r \\ &= \frac{2S}{a} - 2 \cdot \frac{2S}{k} \\ &= \frac{2S(k-2a)}{ak} \\ &= \frac{2S(-a+b+c)}{a(a+b+c)} \\ &= h \cdot \frac{-a+b+c}{a+b+c} \\ \therefore \frac{d}{h} &= \frac{-a+b+c}{a+b+c} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} PQ : BC &= d : h \\ \therefore PQ &= \frac{d}{h} BC \\ &= \frac{-a+b+c}{a+b+c} \cdot a \\ &= \frac{a(-a+b+c)}{a+b+c} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{a(-a+b+c)}{a+b+c}$

(3)

(2)と同様に考えると

$$RL = \frac{b(a-b+c)}{a+b+c}, MN = \frac{c(a+b-c)}{a+b+c}$$

であることがわかる。ここで辺LM、MN、NP、PQ、QR、RLと円Oとの接点をそれぞれU、V、W、X、Y、Zとする。そのとき円の接線であることより

$$LU = LZ, MU = MV, NV = NW, PW = PX, QX = QY, RY = RZ$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned} l &= LU + MU + MV + NV + NW + PW + PX + QX + QY + RY + RZ + LZ \\ &= LZ + MV + MV + NV + NV + PX + PX + QX + QX + RZ + RZ + LZ \\ &= 2(PX + QX) + 2(RZ + LZ) + 2(MV + NV) \\ &= 2PQ + 2RL + 2MN \\ &= 2 \cdot \frac{a(-a+b+c)}{a+b+c} + 2 \cdot \frac{b(a-b+c)}{a+b+c} + 2 \cdot \frac{c(a+b-c)}{a+b+c} \\ &= \frac{2(-a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)}{a+b+c} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2(-a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)}{a+b+c}$

(4)

(1)と同様に考えると

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}r(LM + MN + NP + PQ + QR + RL) = \frac{1}{2}rl \\ \therefore \frac{T}{l} &= \frac{r}{2} = \frac{S}{k} (\because (1)) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{S}{k}$

(5)

(4)の結果と $a+b+c=1 \Leftrightarrow c=1-a-b$ であることより

$$\begin{aligned} l &= 2(-a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \\ &= 2\{-(a+b+c)^2 + 4ab + 4bc + 4ca\} \\ &= 2\{-1^2 + 4ab + 4(a+b)(1-a-b)\} \\ &= 2\{-4a^2 - 4ab + 4a - 4b^2 + 4b - 1\} \\ &= 2\{-(2a+b-1)^2 - 3b^2 + 2b\} \end{aligned}$$

となる。よって l は $a = -\frac{b-1}{2}$ のときに最大となり、このとき l は

$$l = 2(-3b^2 + 2b) = 2\left\{-3\left(b - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\right\}$$

となる。よって l は $b = \frac{1}{3}$ のときに最大となり、このとき $a = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$ である。以上より、 l は

$a = b = c = \frac{1}{3}$ のときに最大値 $\frac{2}{3}$ をとる。

(答) $a = b = c = \frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{2}{3}$