

【I】

【解答】

ア	$\sqrt{2t^2+2t+1}$	イ	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	ウ	$5+2\sqrt{2}$
エ	$\frac{5}{6}\pi$	オ	1	カ	$a\bar{x}+b\bar{y}$
キ	$as_x^2+bs_{xy}$	ク	1	ケ	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
				コ	$r_{xy}+1$

【解説】

(1) 1)

$$\begin{aligned}\text{PQ} &= \sqrt{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{(1+t)^2+(-t)^2} \\ &= \sqrt{2t^2+2t+1} \\ &= \sqrt{2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}t &= \sin\theta-\cos\theta \\ &= \sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

であり、 $0\leq\theta<2\pi$ より $-\frac{\pi}{4}\leq\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$ であるので

$$-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$$

である。よって PQ は $t=-\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。また

$$\text{PQ}^2=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

であるので、 PQ^2 は $t=\sqrt{2}$ で最大値 $5+2\sqrt{2}$ をとる。

2)

OP//OQ より

$$\begin{aligned}(\cos\theta,\sin\theta)&//(1+\sin\theta,\cos\theta) \\ \Leftrightarrow \cos\theta\cdot\cos\theta-(1+\sin\theta)\cdot\sin\theta&=0 \\ \Leftrightarrow \cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta&=0 \\ \Leftrightarrow 2\sin^2\theta+\sin\theta-1&=0\left(\because\cos^2\theta=1-\sin^2\theta\right) \\ \Leftrightarrow (2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)&=0 \\ \Leftrightarrow \sin\theta&=-1,\frac{1}{2} \\ \therefore\theta&=\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi,\frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

となる。それぞれの θ に対して $t=\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2},-1$ となり、 $\text{PQ}=\sqrt{2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$ であるので、

$t=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 、すなわち $\theta=\frac{5}{6}\pi$ のとき PQ は最大となる。

3)

$\triangle$ OPQ の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\left|\cos\theta\cdot\cos\theta-\sin\theta\cdot(1+\sin\theta)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|2\sin^2\theta+\sin\theta-1\right|\left(\because\cos^2\theta=1-\sin^2\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}\left|2\left(\sin\theta+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\right|\end{aligned}$$

と表せる。また、

$$\begin{aligned}2\left(\sin\theta+\frac{1}{4}\right)^2&=\frac{9}{8} \\ \Leftrightarrow \sin\theta&=-\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \sin\theta&=\frac{1}{2},-1\end{aligned}$$

であるから、 S は $\frac{1}{2}\leq\sin\theta\leq 1$ のとき

$$S=\left(\sin\theta+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

であり、 $-1\leq\sin\theta<\frac{1}{2}$ のとき

$$S=-\left(\sin\theta+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{16}\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

となる。それぞれにおいて S の最大値を考えると、 $\textcircled{1}$ は $\sin\theta=1$ で最大値 1 をとり、 $\textcircled{2}$ は

$\sin\theta=-\frac{1}{4}$ で最大値 $\frac{9}{16}$ をとる。したがって S は $\sin\theta=1$ 、すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大値 1 をとる。

(2) 1)

$z=ax+by$ より

$$\bar{z}=\overline{ax+by}=a\bar{x}+b\bar{y}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}s_{xz} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)\left(z_i-\bar{z}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)\left\{a\left(x_i-\bar{x}\right)+b\left(y_i-\bar{y}\right)\right\}\left(\because\bar{z}=a\bar{x}+b\bar{y}\right) \\ &= a\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)^2+b\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right) \\ &= as_x^2+bs_{xy}\end{aligned}$$

となる。

2)

1)と同様にして $s_{yz}=as_{xy}+bs_y^2$ と表せる。また、

$$\begin{aligned}r_{xy} &= \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \\ &= 0 \\ \therefore s_{xy} &= 0\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}r_{xz} &= \frac{s_{xz}}{s_x s_z} = \frac{as_x^2+bs_{xy}}{s_x s_z} = \frac{as_x}{s_z} \\ r_{yz} &= \frac{s_{yz}}{s_y s_z} = \frac{as_{xy}+bs_y^2}{s_y s_z} = \frac{bs_y}{s_z}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}s_z^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(z_i-\bar{z}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left\{a\left(x_i-\bar{x}\right)+b\left(y_i-\bar{y}\right)\right\}^2\left(\because\bar{z}=a\bar{x}+b\bar{y}\right) \\ &= a^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)^2+2ab\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)+b^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(y_i-\bar{y}\right)^2 \\ &= a^2s_x^2+2abs_{xy}+b^2s_y^2 \\ &= a^2s_x^2+b^2s_y^2\left(\because s_{xy}=0\right)\end{aligned}$$

であるので、

$$r_{xz}^2+r_{yz}^2=\frac{a^2s_x^2+b^2s_y^2}{s_z^2}=\frac{a^2s_x^2+b^2s_y^2}{a^2s_x^2+b^2s_y^2}=1$$

となる。

3)

2)の過程より

$$s_z^2=a^2s_x^2+2abs_{xy}+b^2s_y^2$$

であるので、 $s_x^2=s_y^2=1$ 、 $a^2+b^2=1$ より

$$\begin{aligned}s_z^2 &= a^2\cdot 1+2abs_{xy}+b^2\cdot 1 \\ &= 2abs_{xy}+1\end{aligned}$$

となるため、 $s_{xy}>0$ より s_z^2 が最大となるのは $2ab$ が最大となるときである。ここで、

$$1=a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2\cdot b^2}=2|a|b\geq 2ab\left(\because b>0\right)$$

であり、等号成立条件は

$$\begin{aligned}a &= |a| = b \\ \therefore a=b &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\because a^2+b^2=1\right)\end{aligned}$$

である。ゆえに $2ab$ は $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のときに最大値 1 をとるから、 s_z^2 は $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のときに最大

値 $s_{xy}+1$ をとる。ここで $s_x^2=s_y^2=1$ より $s_x=s_y=1\left(\because s_x>0,s_y>0\right)$ であるから、

$$r_{xy}=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=s_{xy}$$

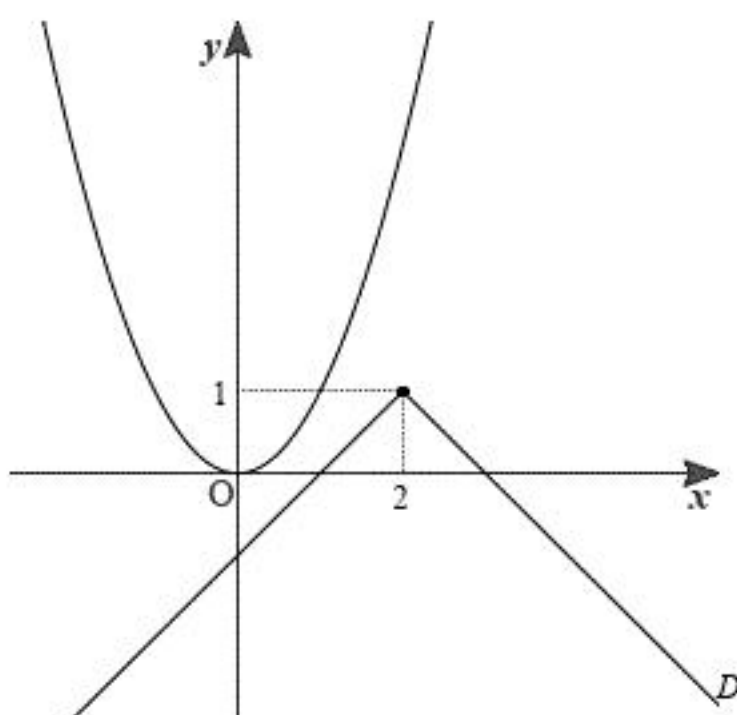
となる。したがって $s_{xy}+1=r_{xy}+1$ となる。

【Ⅱ】

(1)

$$y = -|x-2|+1 = \begin{cases} -x+3 & (x \geq 2) \\ x-1 & (x < 2) \end{cases}$$

となるので、 D は下図のようになる。



よって L と D が共有点をもつ条件は

$$a^2 \leq 1$$

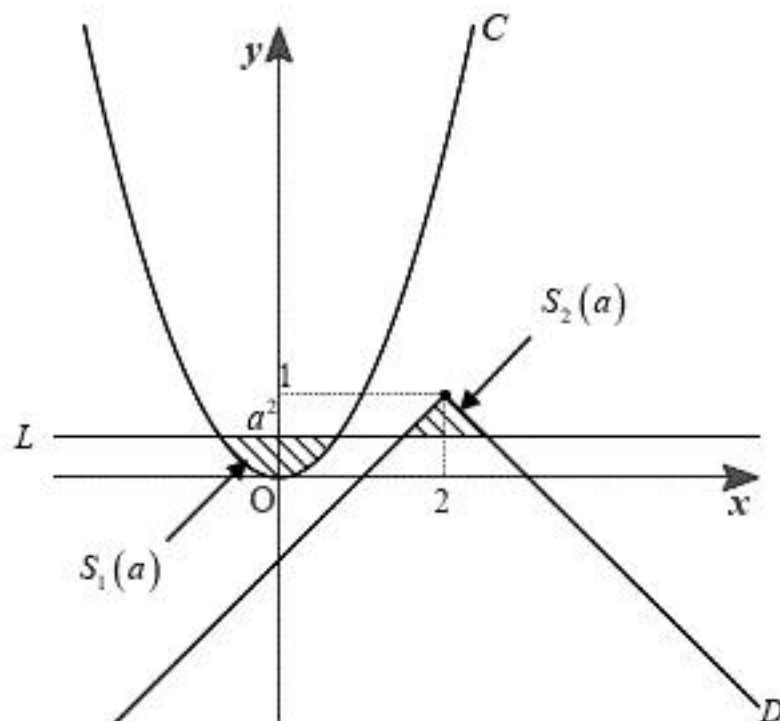
$$\therefore 0 \leq a \leq 1 \quad (\because 0 \leq a)$$

である。

(答) $0 \leq a \leq 1$

(2)

$a \leq 1$ のときの $S_1(a)$, $S_2(a)$ はそれぞれ下図の斜線部の面積である。



L と C の共有点の x 座標は

$$x^2 = a^2$$

$$\therefore x = \pm a$$

である。また $a \leq 1$ のときの L と D の共有点の x 座標は、 $y = a^2$ と $y = -|x-2|+1$ から y を消去して

$$a^2 = -|x-2|+1$$

$$\Leftrightarrow |x-2| = 1-a^2$$

$$\Leftrightarrow x-2 = \pm(1-a^2)$$

$$\Leftrightarrow x = a^2+1, -a^2+3$$

である。 $a \geq 1$ で $S_2(a) = 0$ となるので、 $S_1(a)$, $S_2(a)$ は

$$\begin{aligned} S_1(a) &= \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-a}^a \\ &= \frac{4}{3} a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(a) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \{(-a^2+3) - (a^2+1)\} \cdot (1-a^2) & (0 \leq a < 1) \\ 0 & (a \geq 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} a^4 - 2a^2 + 1 & (0 \leq a < 1) \\ 0 & (a \geq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

$$S_1(a) = \frac{4}{3} a^3$$

(答)

$$S_2(a) = \begin{cases} a^4 - 2a^2 + 1 & (0 \leq a < 1) \\ 0 & (a \geq 1) \end{cases}$$

(3)

(2)の結果より

$$S(a) = S_1(a) + S_2(a)$$

$$= \begin{cases} a^4 + \frac{4}{3} a^3 - 2a^2 + 1 & (0 \leq a < 1) \\ \frac{4}{3} a^3 & (a \geq 1) \end{cases}$$

である。 $0 \leq a < 1$ において

$$\begin{aligned} S'(a) &= 4a^3 + 4a^2 - 4a \\ &= 4a(a^2 + a - 1) \\ &= 4a \left(a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(a - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$ であり、また $a \geq 1$ においては

$$S'(a) = 4a^2 > 0$$

であるので、 $S(a)$ の増減表は下表のようになる。

a	0	...	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	...	1	...
$S'(a)$	/	-	0	+	+	+
$S(a)$	1	$\searrow$	$S\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$

よって、 $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のときに $S(a)$ は最小値をとる。以下、 $S\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ の値を求める。 $S'(a)$

の計算過程より、 $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ は $a^2 + a - 1 = 0$ を満たす。そこで $a^4 + \frac{4}{3} a^3 - 2a^2 + 1$ を $a^2 + a - 1$ で

割ると、商が $a^2 + \frac{1}{3} a - \frac{4}{3}$ 、余りが $\frac{5}{3} a - \frac{1}{3}$ となるから、

$$a^4 + \frac{4}{3} a^3 - 2a^2 + 1 = (a^2 + a - 1) \left(a^2 + \frac{1}{3} a - \frac{4}{3} \right) + \frac{5}{3} a - \frac{1}{3}$$

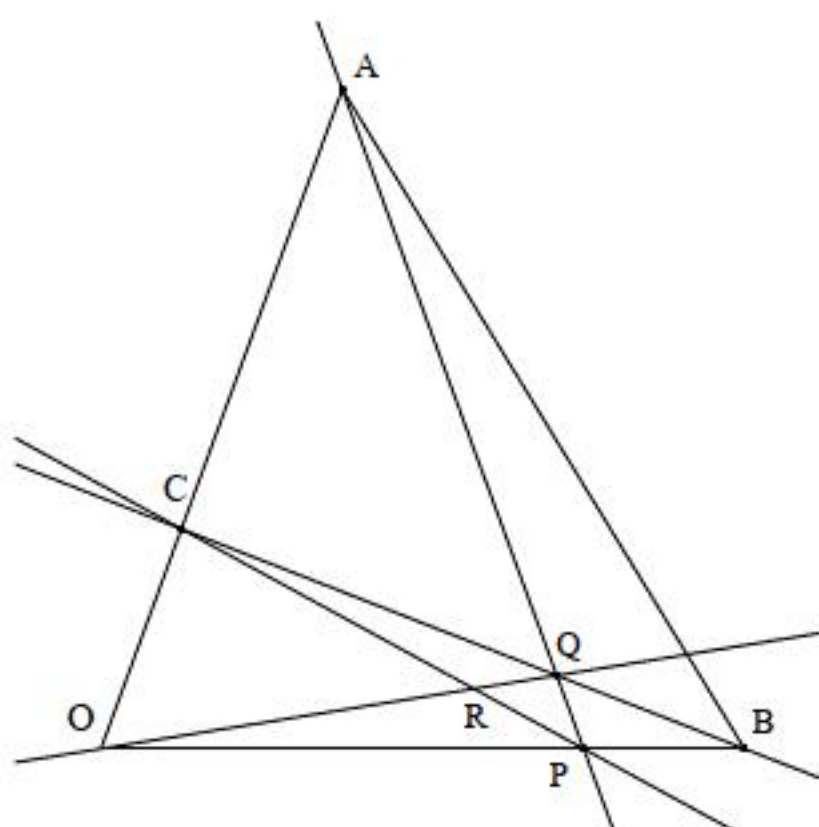
が成り立つ。よって $a^2 + a - 1 = 0$ より、

$$\begin{aligned} S\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{5}{3} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{-7+5\sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

である。すなわち最小値は $\frac{-7+5\sqrt{5}}{6}$ である。

(答) 最小値: $\frac{-7+5\sqrt{5}}{6}$, $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

【Ⅲ】



(1)

Qは直線AP上の点なので実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = t\vec{a} + (1-t)p\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。同様にQは直線BC上の点なので実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = (1-s)c\vec{a} + s\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$ かつ $\vec{a}, \vec{b}$ は平行でないから、①、②を比べて

$$\begin{cases} t = (1-s)c \\ (1-t)p = s \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} t = \frac{c(1-p)}{1-pc} \\ s = \frac{p(1-c)}{1-pc} \end{cases} \quad (\because 0 < c < 1, 0 < p < 1 \Rightarrow 0 < pc < 1)$$

となる。これを①に代入して

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{c(1-p)\vec{a} + p(1-c)\vec{b}}{1-pc}$$

である。ここで

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{c(1-p)\vec{a} + p(1-c)\vec{b}}{1-pc} = \frac{2-p-c}{1-pc} \cdot \frac{(1-p)c\vec{a} + (1-c)p\vec{b}}{(1-p) + (1-c)}$$

となることと、Rは直線OQ上にあることから、 $\overrightarrow{OR}$ は $\frac{(1-p)c\vec{a} + (1-c)p\vec{b}}{(1-p) + (1-c)}$ の実数倍である。

一方で、線分CPを $(1-c):(1-p)$ に内分する点をR'とすると、

$$\overrightarrow{OR'} = \frac{(1-p)c\vec{a} + (1-c)p\vec{b}}{(1-p) + (1-c)}$$

となるから、R'は直線OQと直線PCの交点Rに一致し、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{(1-p)c\vec{a} + (1-c)p\vec{b}}{(1-p) + (1-c)} = \frac{(1-p)c\vec{a} + (1-c)p\vec{b}}{2-p-c}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{c(1-p)\vec{a} + p(1-c)\vec{b}}{1-pc}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{(1-p)c\vec{a} + (1-c)p\vec{b}}{2-p-c}$$

(2)

(1)より、Rは線分CPを $(1-c):(1-p)$ に内分する。また、 $\triangle OCP$ の面積 T は

$$T = 1 \cdot c \cdot p = pc$$

であるので

$$\begin{aligned} S &= \frac{1-p}{(1-c) + (1-p)} T \\ &= \frac{pc(1-p)}{2-p-c} \\ &= \frac{c(t+c-1)(2-c-t)}{t} \quad (\because p = 2-c-t) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{c(t+c-1)(2-c-t)}{t}$$

(3)

Cを固定してPが両端を除く線分OB上を動くので c を定数として t を $1-c < t < 2-c$ を満たす実数変数として考えればよい。(2)の結果より

$$S = \frac{c(t+c-1)(2-c-t)}{t} = -c \left\{ t + \frac{(c-1)(c-2)}{t} \right\} - c(2c-3)$$

となる。ここで、 $0 < c < 1, t > 0$ より $t > 0, \frac{(c-1)(c-2)}{t} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の

関係より

$$t + \frac{(c-1)(c-2)}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{(c-1)(c-2)}{t}} = 2\sqrt{(c-1)(c-2)}$$

である。よって

$$S \leq -c \left\{ 2\sqrt{(c-1)(c-2)} + (2c-3) \right\}$$

となる。等号成立条件は $t = \frac{(c-1)(c-2)}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{(c-1)(c-2)}$ ($\because t > 0$)であり、 $0 < c < 1$ より

$$1-c = \sqrt{(1-c)^2} < \sqrt{(c-1)(c-2)} < \sqrt{(2-c)^2} < 2-c$$

である。以上より、 S の最大値は $-c \left\{ 2\sqrt{(c-1)(c-2)} + 2c-3 \right\}$ である。

$$(\text{答}) \quad -c \left\{ 2\sqrt{(1-c)(2-c)} + 2c-3 \right\}$$

(4)

(1)で求めた $\overrightarrow{OR}$ の式に $p = \frac{1}{2}$ を代入することで

$$\overrightarrow{OU} = \frac{c\vec{a} + (1-c)\vec{b}}{3-2c}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \frac{(1-p)c\vec{a} + (1-c)p\vec{b}}{2-p-c} \\ &= \frac{(1-p)c}{2-p-c} \vec{a} + \left\{ \frac{(1-p)(1-c)}{2-p-c} + 1 - \frac{(1-p)(3-2c)}{2-p-c} \right\} \vec{b} \\ &= \frac{(1-p)(3-2c)}{2-p-c} \cdot \frac{c\vec{a} + (1-c)\vec{b}}{3-2c} + \left\{ 1 - \frac{(1-p)(3-2c)}{2-p-c} \right\} \vec{b} \\ &= x\overrightarrow{OU} + (1-x)\overrightarrow{OB} \quad \left(x = \frac{(1-p)(3-2c)}{2-p-c} \right) \end{aligned}$$

と表せる。ここで x は p に依る実数変数である。これはPが両端を除く線分OB上を動く、つまり、 p が $0 < p < 1$ で変化するときRが直線BU上を動くことを表している。

(証明終)