

【Ⅰ】

【解答】

(1)

ア	イ	ウ
6	12	2^{n-1}

エ	オ
$2^{n-1}-2$	$3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3$

(2)

カ	キ	ク
$2a$	2	$-a+2$

ケ	コ
$2+2\sqrt{2}$	5

【解説】

(1) 5個の文字の列を考えたとき、b, c, dをすべて1つずつ含みaから始まりaで終わる文字列の数はb, c, dを1列に並べる並べ方の数に等しいので

$$3!=6 \quad (\text{通り})$$

である。次にbを1つだけ含みaから始まりaで終わる文字列は上の場合の他に

$$acbca, adbd a, abaca, acaba, abada, adaba$$

があるので、bを1つだけ含みaから始まりaで終わる文字列の数は

$$6+6=12 \quad (\text{通り})$$

である。次にn個の文字列を考えたとき、dを1つも含まないaから始まる文字列は、先頭のaの次から順に並べる文字を1つずつ考えていくと、並べることのできる文字はそれぞれ2通りずつあるので、

$$2^{n-1} \quad (\text{通り}) \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

である。また、この文字列のうちbまたはcどちらか一方を含まない文字列は、それぞれ

$$\begin{array}{l} acacac\cdots \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \\ ababab\cdots \end{array}$$

の1通りずつだけであり、与条件よりb, cどちらも含まないということはありませんから、dを1つも含まないがb, cをいずれも1つ以上含むaから始まる文字列の数は

$$2^{n-1}-2 \quad (\text{通り}) \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}$$

である。そして、

$$\begin{array}{l} S=(\text{aから始まる文字列の数}) \\ T=(\text{b, c, dのうち1種類のみ1つも含まないaから始まる文字列の数}) \\ U=(\text{b, c, dのうち1種類のみ含むaから始まる文字列の数}) \end{array}$$

とすると、b, c, dを1つ以上含むaから始まる文字列の数Pは

$$P=S-{}_3C_1\cdot T-{}_3C_1\cdot U=S-3T-3U$$

となる。ここで、①と同様に考えて

$$S=3^{n-1}$$

であることと②、③より

$$P=3^{n-1}-3\cdot (2^{n-1}-2)-3\cdot 1=3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3$$

となる。

(2) $P(x)$ は実数係数の4次式であるので

$$\overline{\alpha}=\overline{1+i}=1-i$$

も方程式 $P(x)=0$ は解にもつ。よって、 $P(x)$ は2次式 $Q(x)$

$$Q(x)=\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=x^2-2x+2$$

を因子としてもつ。したがって、 $P(x)$ を $Q(x)$ で割った余りは0になる。ここで

$$\begin{array}{l} P(x)=x^4-ax^3+bx^2-2ax+4=\left(x^2-2x+2\right)\left\{x^2+(-a+2)x+b-2a+2\right\}+2(b-2a)(x-1) \\ \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{array}$$

となるから、

$$2(b-2a)(x-1)=0$$

である。これがxの恒等式となるから

$$\begin{array}{l} b-2a=0 \\ \therefore b=2a \end{array}$$

となる。次に、 $P(x)=Q(x)R(x)$ と表すとする①より

$$\begin{array}{l} R(x)=x^2+(-a+2)x+b-2a+2 \\ \qquad \qquad \qquad =x^2+(-a+2)x+2 \quad (\because b=2a) \end{array}$$

となる。 $Q(x)=0$ は実数解を持たないので、 $P(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつには $R(x)=0$ が異なる2つの実数解をもたなければならない。 $R(x)$ の判別式をDとすると、求める条件は

$$\begin{array}{l} D>0 \\ \Leftrightarrow (-a+2)^2-4\cdot 1\cdot 2>0 \\ \Leftrightarrow a^2-4a-4>0 \\ \Leftrightarrow a>2+2\sqrt{2}, a<2-2\sqrt{2} \\ \therefore a>2+2\sqrt{2} \quad (\because a>0) \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \end{array}$$

である。したがって、 $a_0=2+2\sqrt{2}$ である。ここで、 $R(x)=0$ の2解を γ, δ とすると $P(x)=0$ の4解は

$$1+i, 1-i, \gamma, \delta$$

となる。また $a>2+2\sqrt{2}$ のとき、 γ, δ は実数であるから、複素数平面上において4点A, B, C, Dのうちのいずれかの3点が一直線上にあるには

$$\begin{array}{l} 3点A, B, C \text{または} 3点A, B, D \text{が一直線上にある} \\ \Leftrightarrow \gamma=1 \text{または} \delta=1 \end{array}$$

とならなければならない。つまり、 $R(x)=0$ が $x=1$ を解にもたなければならない。よって求める条件は

$$\begin{array}{l} R(1)=1^2+(-a+2)\cdot 1+2=0 \\ \therefore a=5 \end{array}$$

である。これは②を満たしている。

〔Ⅱ〕

(1)

$$f(1) = 1 + (e-1)\log 1 = 1 + 0 = 1$$

$$f(e) = 1 + (e-1)\log e = 1 + e - 1 = e$$

となる。

(答) $f(1) = 1, f(e) = e$

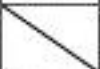
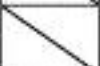
(2)

$$g(x) = f(x) - x = (e-1)\log x - x + 1$$

であるので

$$g'(x) = (e-1) \cdot \frac{1}{x} - 1 = \frac{(e-1) - x}{x}$$

となる。ゆえに $y = g(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	$g(e-1)$	$\searrow$

よって $y = g(x)$ は $x = e-1$ で極大値 $g(e-1) = (e-1)\log(e-1) - e + 2$ をとる。また、

$$g(1) = g(e) = 0$$

であることと上の増減表より $1 \leq x \leq e$ で $g(x) \geq 0$ となる。

(答) $(e-1)\log(e-1) - e + 2$
 $1 \leq x \leq e$

(3)

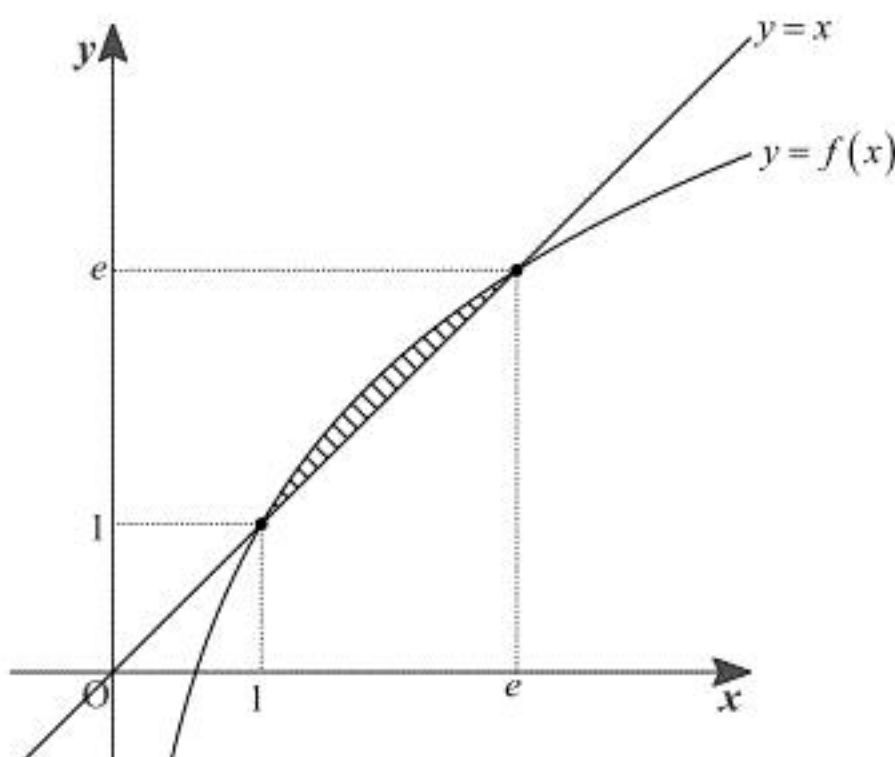
$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \{1 + (e-1)\log x\} dx \\ &= \int 1 \cdot dx + (e-1) \int (x)' \log x dx \\ &= \int 1 \cdot dx + (e-1)x \log x - (e-1) \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= (e-1)x \log x + x - (e-1)x + D \\ &= (e-1)x \log x + (2-e)x + D \end{aligned}$$

となる。ただし D は積分定数である。

(答) $(e-1)x \log x + (2-e)x + D$ (D は積分定数)

(4)

(2)の結果より求める面積 S は下図の斜線部の面積である。



よって

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e (f(x) - x) dx \\ &= \left[(e-1)x \log x + (2-e)x - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^e \\ &= -\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2}$

【Ⅲ】

- (1) 求める半径を r とすると $r=OA$ であるので

$$r=\sqrt{1^2+1^2+4^2}=3\sqrt{2}$$

である。

(答) $3\sqrt{2}$

- (2) H は $\triangle BCD$ の外心に一致する。また、 $\triangle BCD$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理より

$$\frac{BD}{\sin \angle BCD}=2R$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sin 60^\circ}=2R$$

$$\therefore R=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

となる。よって、 $\triangle ABH$ に三平方の定理を用いて

$$AH^2=AB^2-BH^2=a^2-R^2=a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2}{3}a^2$$

$$\therefore AH=\frac{\sqrt{6}}{3}a\left(\because AH>0, a>0\right)$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{6}}{3}a$

- (3) O は AH 上にあるため

$$OH=AH-OA=\frac{\sqrt{6}}{3}a-r=\frac{\sqrt{6}}{3}a-3\sqrt{2}$$

であり、 $OB=r=3\sqrt{2}$, $BH=R=\frac{a}{\sqrt{3}}$ より $\triangle OBH$ に三平方の定理を用いて

$$OB^2=BH^2+OH^2$$

$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-3\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-4\sqrt{3}a=0$$

$$\Leftrightarrow a\left(a-4\sqrt{3}\right)=0$$

$$\therefore a=4\sqrt{3}\left(\because a>0\right)$$

となる。

(答) $4\sqrt{3}$

- (4) B は xy 平面上にあるので $B(x, y, 0)$ と表せる。B は S 上にあるので

$$x^2+y^2+0^2=r^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$$

$$\therefore x^2+y^2=18 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。 $AB=a$ となるので

$$AB=\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(0-4\right)^2}=a$$

$$\therefore \left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2+16=a^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2=48 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

である。①を②に代入して

$$x+y=-6 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。よって①、③より

$$\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ x+y=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(-x-6\right)^2=18 \\ y=-x-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+3\right)^2=0 \\ y=-x-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$$

となる。よって $B(-3, -3, 0)$ である。

(答) $(-3, -3, 0)$

- (5) $C(s, t, u)$ とする。C の x 座標は正であるので $s>0$ である。C は S 上にあり $CA=CB=a=4\sqrt{3}$ であるので

$$OC^2=s^2+t^2+u^2=r^2=18 \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$CA^2=\left(s-1\right)^2+\left(t-1\right)^2+\left(u-4\right)^2=a^2=48 \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$CB^2=\left(s+3\right)^2+\left(t+3\right)^2+u^2=a^2=48 \qquad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

となる。⑤-④より

$$-2s-2t-8u+18=30$$

$$\therefore s+t+4u=-6 \qquad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

である。また⑥-④より

$$6s+6t+18=30$$

$$\therefore s+t=2 \qquad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

となる。⑧を⑦に代入して

$$u=-2$$

となる。また、この結果と④、⑧より

$$\begin{cases} s^2+t^2+4=18 \\ s+t=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s^2+\left(2-s\right)^2=14 \\ t=2-s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s^2-2s-5=0 \\ t=2-s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s=1\pm\sqrt{6} \\ t=2-s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow s=1+\sqrt{6}, t=1-\sqrt{6}\left(\because s>0\right)$$

となる。よって $C\left(1+\sqrt{6}, 1-\sqrt{6}, -2\right)$ である。

(答) $\left(1+\sqrt{6}, 1-\sqrt{6}, -2\right)$

〔Ⅳ〕

(1)

$$\begin{aligned} r^{-x^2} \frac{d}{dx} (x^2 r^{x^2}) &= r^{-x^2} (2x \cdot r^{x^2} + x^2 \cdot 2x \cdot r^{x^2} \log r) \\ &= 2x(1+x^2 \log r) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2x(1+x^2 \log r)$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} |x| (1+x^2 \log r) r^{x^2} dx &= \int_0^{\sqrt{2}} x(1+x^2 \log r) r^{x^2} dx + \int_{-\sqrt{3}}^0 (-x)(1+x^2 \log r) r^{x^2} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} r^{-x^2} (x^2 r^{x^2})' r^{x^2} dx - \int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{1}{2} r^{-x^2} (x^2 r^{x^2})' r^{x^2} dx \quad (\because (1)) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} (x^2 r^{x^2})' dx - \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^0 (x^2 r^{x^2})' dx \\ &= \frac{1}{2} [x^2 r^{x^2}]_0^{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} [x^2 r^{x^2}]_{-\sqrt{3}}^0 \\ &= \frac{3}{2} r^3 + r^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{2} r^3 + r^2$$

(3)

$$\sum_{i=1}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (0 < x < 1)$$

である。両辺を x で微分して

$$\sum_{i=1}^n i x^{i-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

となる。 $x=r$ を代入して

$$\sum_{i=1}^n i r^{i-1} = \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(1-r)^2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(1-r)^2}$$

(4)

$a_i < 0, b_i > 0$ であるので、

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |x| (1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\int_{a_i}^0 x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx + \int_0^{b_i} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{a_i} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx + \int_0^{b_i} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \int_0^{a_i} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx \\ &= \int_0^{-1} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx + \int_0^{-\sqrt{2}} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx + \\ &\cdots + \int_0^{-\sqrt{n}} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^{-\sqrt{i}} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx \\ &\sum_{j=1}^n \int_0^{b_j} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx \\ &= \int_0^1 x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx + \int_0^{\sqrt{2}} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx + \\ &\cdots + \int_0^{\sqrt{n}} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^{\sqrt{i}} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx \end{aligned}$$

であり、 C を積分定数として

$$\begin{aligned} \int x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx &= x(-\cos x) + \int \cos x dx + \frac{1}{2r} \int 2x(1+x^2 \log r) r^{x^2} dx \\ &= -x \cos x + \sin x + \frac{1}{2r} x^2 r^{x^2} + C \quad (\because (1)) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{a_i} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx + \int_0^{b_i} x(1+\sin x + x^2 \log r) r^{x^2-1} dx \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left[-x \cos x + \sin x + \frac{1}{2r} x^2 r^{x^2} \right]_0^{-\sqrt{i}} + \left[-x \cos x + \sin x + \frac{1}{2r} x^2 r^{x^2} \right]_0^{\sqrt{i}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{i} \cos \sqrt{i} - \sin \sqrt{i} + \frac{1}{2r} i r^i - \sqrt{i} \cos \sqrt{i} + \sin \sqrt{i} + \frac{1}{2r} i r^i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n i r^{i-1} \\ &= \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

となる。よって、この結果より T_n は a_i と b_i の定め方によらずに n と r だけで定まることがわかる。

(証明終)

また、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(1-r)^2} \\ &= \frac{0 \cdot r - 0 - 0 + 1}{(1-r)^2} \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad (\because 0 < r < 1) \right) \\ &= \frac{1}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad T_n = \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(1-r)^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{(1-r)^2}$$