

【I】

【解答】

(1)	$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ウ}}$	$\boxed{\text{エ}}$	$\boxed{\text{オ}}$
	2400	$7^{n-1}-1$	122	4	0
(2)	$\boxed{\text{カ}}$	$\boxed{\text{キ}}$	$\boxed{\text{ク}}$	$\boxed{\text{ケ}}$	$\boxed{\text{コ}}$
	$-\frac{t+1}{2}$	$\frac{t+1}{2}$	$y=-x-\left(\frac{t+1}{2}\right)^2$	$\sqrt{2}(t+1)$	$\frac{\sqrt{2}}{48}$

【解説】

(1)

与えられた漸化式を変形すると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=7(a_{n+1}-a_n) \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2}-7a_{n+1}=a_{n+1}-7a_n \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

という式を得る。①より、数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=6-0=6$ 、公比 7 の等比数列であるため、

$$a_{n+1}-a_n=6\cdot 7^{n-1} \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

である。また②より、数列 $\{a_{n+1}-7a_n\}$ は初項 $a_2-7a_1=6-7\cdot 0=6$ の、つねに一定値をとる数列であるため、

$$a_{n+1}-7a_n=6 \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

である。③から④を辺辺引いて、

$$6a_n=6(7^{n-1}-1)$$

$$\therefore a_n=7^{n-1}-1$$

を得る。よって $a_5=7^4-1=2400$ である。また $a_{145}=7^{144}-1$ である。この数の桁を計算するために $\log_{10}7^{144}$ を計算すると

$$\begin{aligned} \log_{10}7^{144} &=144\cdot \log_{10}7 \\ &=144\cdot 0.8451 \\ &=121.6944 \end{aligned}$$

である。 $\log_{10}4=2\log_{10}2=2\cdot 0.3010=0.6020$ と $\log_{10}5=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$ より

$$\begin{aligned} 121+0.6020 &< 121.6944 < 121+0.6990 \\ \Leftrightarrow 121+\log_{10}4 &< \log_{10}7^{144} < 121+\log_{10}5 \\ \Leftrightarrow 4\cdot 10^{121} &< 7^{144} < 5\cdot 10^{121} \\ \Leftrightarrow 4\cdot 10^{121}-1 &< 7^{144}-1 < 5\cdot 10^{121}-1 \\ \Leftrightarrow 4\cdot 10^{121}-1 &< a_{145} < 5\cdot 10^{121}-1 \end{aligned}$$

となる。ゆえに a_{145} は122桁の数で、最高位の数はいちである。また $f(n)$ が自然数 n の1の位の数を表すとする。任意の自然数 a, b について

$$f(ab)\equiv f(a)f(b) \pmod{10}$$

$$f(a+b)\equiv f(a)+f(b) \pmod{10}$$

が成立することを利用すると

$$f(7)=7, f(7^2)=9, f(7^3)=3, f(7^4)=1, f(7^5)=7\cdots$$

であり、帰納的に

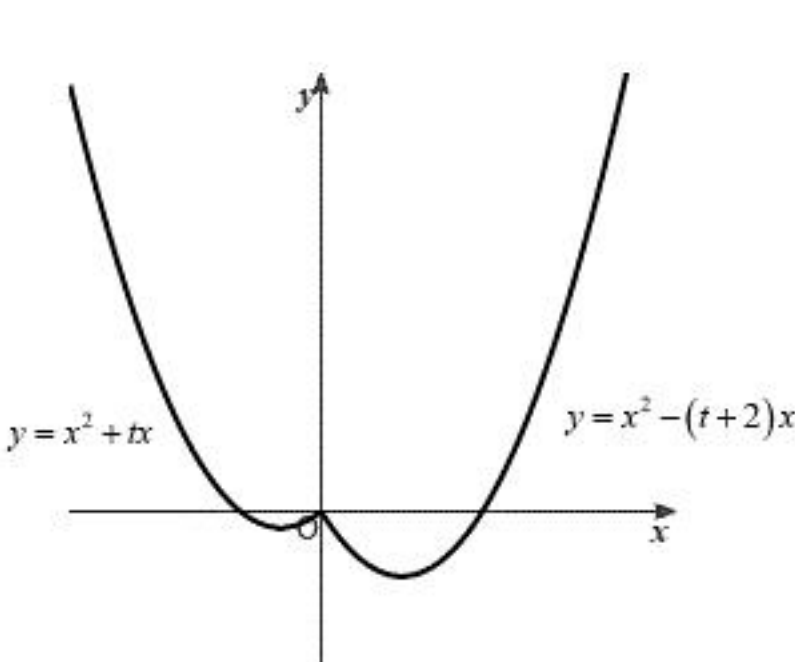
$$f(7^n)=\begin{cases} 7\left(n=4k+1\right) \\ 9\left(n=4k+2\right) \\ 3\left(n=4k+3\right) \\ 1\left(n=4k+4\right) \end{cases}$$

となる。ただし n は自然数で k は非負整数とする。よって $f(a_{145})$ は

$$\begin{aligned} f(a_{145}) &=f(7^{144}-1) \\ &=1-1 \\ &=0 \end{aligned}$$

となり、1の位の数はいちである。

(2)



まず

$$f(x)=\begin{cases} x^2+tx\left(x<0\right) \\ 0\left(x=0\right) \\ x^2-(t+2)x\left(x>0\right) \end{cases}$$

である。よって点 $P(p, f(p))$ ($p<0$)における接線の方程式は

$$y=(2p+t)(x-p)+p^2+pt$$

$$\Leftrightarrow y=(2p+t)x-p^2$$

であり、点 $Q(q, f(q))$ ($q>0$)における接線の方程式は

$$y=(2q-t-2)(x-q)+q^2-(t+2)q$$

$$\Leftrightarrow y=(2q-t-2)x-q^2$$

である。これが一致するので係数を比較して

$$2p+t=2q-t-2 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$-p^2=-q^2 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

である。②と $p<0, q>0$ より $q=-p$ であるので、①に代入して

$$2p+t=-2p-t-2$$

$$\Leftrightarrow 4p=-2t-2$$

$$\Leftrightarrow p=-\frac{t+1}{2}$$

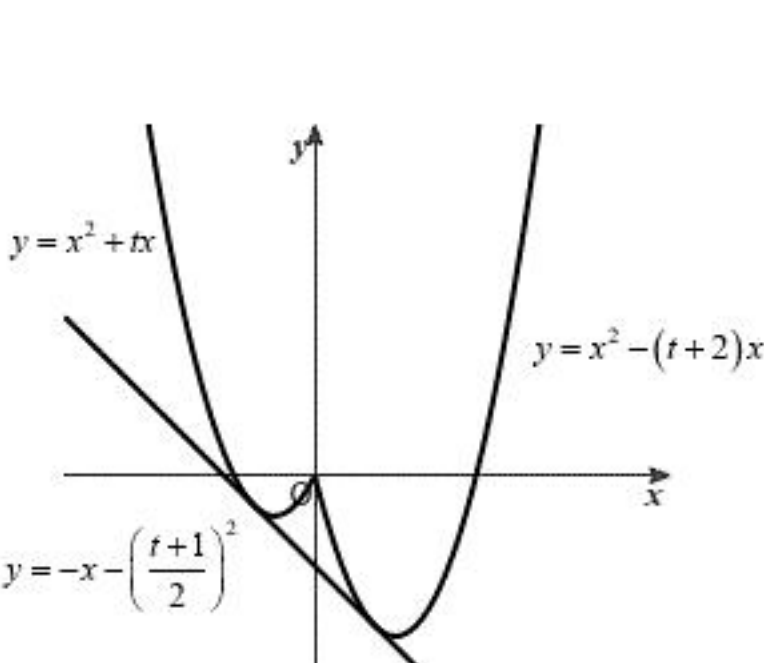
である。よって $q=\frac{t+1}{2}$ を得る。 $p=-\frac{t+1}{2}$ をもとの接線の方程式に代入すると

$$y=-x-\left(\frac{t+1}{2}\right)^2$$

となる。直線PQの傾きが -1 であるため線分PQの長さは点Pと点Qの x 座標の差を $\sqrt{2}$ 倍すればよい。よって l を求めると

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{2}\left\{\left(\frac{t+1}{2}\right)-\left(-\frac{t+1}{2}\right)\right\} \\ &= \sqrt{2}(t+1) \end{aligned}$$

である。



また $x^2+tx\geq -x-\left(\frac{t+1}{2}\right)^2$ と $x^2-(t+2)x\geq -x-\left(\frac{t+2}{2}\right)^2$ が成立し、曲線 C は線分PQより常に上側にあるため、 S を求めると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{t+1}{2}}^0 \left[x^2+tx-\left\{-x-\left(\frac{t+1}{2}\right)^2\right\}\right] dx + \int_0^{\frac{t+1}{2}} \left[x^2-(t+2)x-\left\{-x-\left(\frac{t+1}{2}\right)^2\right\}\right] dx \\ &= \int_{-\frac{t+1}{2}}^0 \left\{ x^2+(t+1)x+\left(\frac{t+1}{2}\right)^2\right\} dx + \int_0^{\frac{t+1}{2}} \left\{ x^2-(t+1)x+\left(\frac{t+1}{2}\right)^2\right\} dx \\ &= \int_{-\frac{t+1}{2}}^0 \left(x+\frac{t+1}{2}\right)^2 dx + \int_0^{\frac{t+1}{2}} \left(x-\frac{t+1}{2}\right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{t+1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{t+1}{2}}^0 + \left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{t+1}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{t+1}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{t+1}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{t+1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{(t+1)^3}{12} \end{aligned}$$

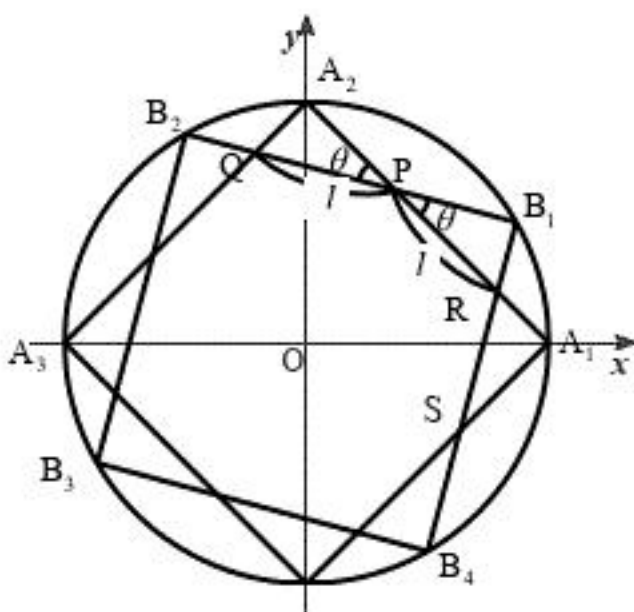
である。よって $\frac{S}{l^3}$ を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{S}{l^3} &= \frac{(t+1)^3}{12} \cdot \frac{1}{\left\{\sqrt{2}(t+1)\right\}^3} \\ &= \frac{1}{24\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{48} \end{aligned}$$

である。

【Ⅱ】

(1)



線分 A_1A_2 と線分 B_1B_4 の交点を点 R とする。また線分 A_1A_4 と線分 B_1B_2 の交点を点 S とする。

弧 A_1B_1 に対する中心角の大きさは θ であるため、円周角の $\angle B_1A_2P$ は $\angle B_1A_2P = \frac{\theta}{2}$ である。同

様に弧 A_2B_2 に対する円周角も $\frac{\theta}{2}$ であるため、 $\angle A_2B_1Q = \frac{\theta}{2}$ である。 $\triangle A_1B_1P$ において外角の

定理より

$$\begin{aligned}\angle A_2PQ &= \angle A_2B_1P + \angle B_1A_2P \\ &= \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \\ &= \theta\end{aligned}$$

を得る。また $\angle B_1A_2P = \angle A_2B_1P = \frac{\theta}{2}$ より $\triangle PA_1B_1$ は二等辺三角形なので、 $A_2P = B_1P$ がわかる。

ここで $\triangle PA_2Q$ と $\triangle PB_1R$ について $\angle QA_2P = \angle RB_1Q = 90^\circ$, $\angle QPA_2 = \angle RPB_1 = \theta$, $PA_2 = PB_1$ であり、1辺とその両端の角が等しいので、 $\triangle PA_2Q \cong \triangle PB_1R$ である。よって $PQ = PR = l$ である。同様にして $\triangle RPB_1 \cong \triangle RSA_1$ となるので、辺 A_1A_2 について立式すると

$$\begin{aligned}l \cos \theta + l + l \sin \theta &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow l &= \frac{\sqrt{2}}{1 + \cos \theta + \sin \theta}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad l = \frac{\sqrt{2}}{1 + \cos \theta + \sin \theta}$$

(2)

$B_1Q : QP : PB_1 = \sin \theta : 1 : \cos \theta$ であり、 $\triangle OB_1B_2$ の面積は $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ であるので $\triangle OPQ$ の面

積は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta + 1} = \frac{1}{2(\cos \theta + \sin \theta + 1)}$$

である。

$$(答) \quad \frac{1}{2(\cos \theta + \sin \theta + 1)}$$

(3)

$\triangle OPQ$ と $\triangle ORP$ について $OP = OR$, $OQ = OP$, $PQ = RQ = l$ であるため3辺がすべて等しく $\triangle OPQ \cong \triangle ORP$ である。同様に $f(\theta)$ は $\triangle OPQ$ と合同な三角形8つを合わせた面積であるため、

$$\begin{aligned}f(\theta) &= 8 \frac{1}{2(\cos \theta + \sin \theta + 1)} \\ &= \frac{4}{\cos \theta + \sin \theta + 1}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \frac{4}{\cos \theta + \sin \theta + 1}$$

(4)

$t = \sin \theta + \cos \theta$ とおく。 $t = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ である。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で $\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ であるため、 $1 < t$

$\leq \sqrt{2}$ である。 $f(\theta) = g(t) = \frac{4}{1+t}$ とおくと、 $0 < t+1 \leq \sqrt{2}+1$ より最小値は

$$g(\sqrt{2}) = \frac{4}{\sqrt{2}+1} = 4\sqrt{2}-4 \text{ である。}$$

$$(答) \quad 4\sqrt{2}-4$$

【Ⅲ】

(1)

d_k は $x+y+z=k$ を満たす非負整数 x, y, z の組の数である。これは k 個の玉を 2 つの仕切りで分けて 1 つ目の仕切りの左側にある球の数を x 、1 つ目の仕切りより右側で 2 つ目の仕切りの左側にある玉の数を y 、2 つ目の仕切りの右側にある玉の数を z とすればよい。よってこのような仕切りの入れ方は

$$d_k =_{k+2} C_2 = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

だけ存在する。

$$(\text{答}) \quad d_k = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

(2)

$x+y+z \leq k$ を満たす非負整数 (x, y, z) の組の数は $x+y+z=l$ ($0 \leq l \leq k$) を満たす非負整数 (x, y, z) の組の数の合計であるので $\sum_{l=0}^k d_l$ で求めることができる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^k d_l &= \sum_{l=0}^k \frac{(l+2)(l+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^k (l^2 + 3l + 2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 + \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + 3 \frac{1}{2} k(k+1) + 2k \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2(k+1) + \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + \frac{3}{2} k(k+1) \right\} \\ &= \frac{1}{12} (k+1) \{ 12 + 2k(2k+1) + 18k \} \\ &= \frac{1}{12} (k+1) (4k^2 + 20k + 12) \\ &= \frac{1}{3} (k+1) (k^2 + 5k + 6) \\ &= \frac{1}{3} (k+1)(k+2)(k+3) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3} (k+1)(k+2)(k+3) \text{ 個}$$

(3)

E_k を非負整数の組 (x, y, z) であって、 $x+y+z=k, 4x+2y+z=2020$ を満たす (x, y, z) の集合であるとする。と e_k は E_k の要素の数である。 $4x+2y+z=2020$ から $x+y+z=k$ を辺辺引いて、

$$\begin{aligned} (4x+2y+z) - (x+y+z) &= 2020 - k \\ \Leftrightarrow 3x+y &= 2020 - k \end{aligned}$$

である。よって E_k は非負整数の組 (x, y, z) であって、 $x+y+z=k, 3x+y=2020-k$ を満たす (x, y, z) の集合である。ここで x を $x=m$ (m はある非負整数) と固定すると、 $y=2020-k-3m, z=2k+2m-2020$ となる。ここで k, m は整数であるため、 y, z も整数である。よってこれらがすべて 0 以上であるような整数 m の数が e_k となる。つまり

$$\begin{aligned} m &\geq 0 && \cdots \textcircled{1} \\ 2020-k-3m &\geq 0 && \cdots \textcircled{2} \\ 2k+2m-2020 &\geq 0 && \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

を満たす整数 m の数を考える。②、③を変形すると

$$\begin{aligned} m &\leq \frac{2020-k}{3} && \cdots \textcircled{4} \\ m &\geq 1010-k && \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となるため、①、④、⑤を満たす整数 m の数を考える。①、④より

$$\begin{aligned} 2020-k &\geq 0 \\ \Leftrightarrow k &\leq 2020 \end{aligned}$$

を満たすことがこのような整数 m が存在する必要条件である。つまり $k > 2020$ で $e_k = 0$ である。よって以下では $0 \leq k \leq 2020$ で考える。

[1] $0 \leq k \leq 504$ のとき

$$0 \leq \frac{2020-k}{3} < 1010-k \text{ なる大小関係が成り立つため、①、④、⑤を満たす } m \text{ は存在しない。つまり } e_k = 0$$

[2] $505 \leq k \leq 1010$ のとき

$$\textcircled{1}, \textcircled{4}, \textcircled{5} \Leftrightarrow 1010-k \leq m \leq \frac{2020-k}{3} \text{ である。ある実数 } x \text{ 以下の最大の整数を } [x] \text{ と表す}$$

とすると

$$\begin{aligned} e_k &= \left[\frac{2020-k}{3} \right] - (1010-k) + 1 \\ &= \left[\frac{2020-k}{3} - 1009 + k \right] \\ &= \left[\frac{-1007+2k}{3} \right] \end{aligned}$$

である。ただし実数 x と整数 n に対して $[x]+n=[x+n]$ が成り立つことを用いた。

[3] $1011 \leq k \leq 2020$ のとき

$$\textcircled{1}, \textcircled{4}, \textcircled{5} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{2020-k}{3} \text{ である。よって}$$

$$\begin{aligned} e_k &= \left[\frac{2020-k}{3} \right] + 1 \\ &= \left[\frac{2023-k}{3} \right] \end{aligned}$$

である。

[1], [2], [3] より $505 \leq k \leq 1010$ のとき e_k は単調非減少であり、 $1011 \leq k \leq 2020$ のとき e_k は単調非増加である。よって e_k の最大値は $k=1010$ から k が小さくなるように調べて e_k の値が変わるところまで調べ、同様に $k=1011$ から k が大きくなるように調べて e_k の値が変わるところまで調べればよい。まず $k=1010$ のとき

$$\begin{aligned} e_{1010} &= \left[\frac{-1007+2 \cdot 1010}{3} \right] \\ &= \left[\frac{1013}{3} \right] \\ &= 337 \end{aligned}$$

つぎに $k=1009$ のとき

$$\begin{aligned} e_{1009} &= \left[\frac{-1007+2 \cdot 1009}{3} \right] \\ &= \left[\frac{1011}{3} \right] \\ &= 337 \end{aligned}$$

つぎに $k=1008$ のとき

$$\begin{aligned} e_{1008} &= \left[\frac{-1007+2 \cdot 1008}{3} \right] \\ &= \left[\frac{1009}{3} \right] \\ &= 336 \end{aligned}$$

つぎに k が増加する方向に調べる。 $k=1011$ のとき

$$\begin{aligned} e_{1011} &= \left[\frac{2023-1011}{3} \right] \\ &= \left[\frac{1012}{3} \right] \\ &= 337 \end{aligned}$$

つぎに $k=1012$ のとき

$$\begin{aligned} e_{1012} &= \left[\frac{2023-1012}{3} \right] \\ &= \left[\frac{1011}{3} \right] \\ &= 337 \end{aligned}$$

つぎに $k=1013$ のとき

$$\begin{aligned} e_{1013} &= \left[\frac{2023-1013}{3} \right] \\ &= \left[\frac{1010}{3} \right] \\ &= 336 \end{aligned}$$

上記より、 $k=1009, 1010, 1011, 1012$ のとき最大値 337 をとる。

$$(\text{答}) \quad 337 \quad (k=1009, 1010, 1011, 1012)$$