

【Ⅰ】

〔解答〕

ア		イ		ウ	
$\frac{1}{3}d_n+\frac{2}{3}b_n$		$\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}c_n$		$\frac{1}{3}(b_n-d_n)$	
エ	オ		カ		キ
b_n+d_n	0		0		$\left(\frac{2}{3}\right)^n$
ク		ケ		コ	
$\left(-\frac{1}{9}\right)^k$		1		$\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{9}\right)^k\right\}$	

〔解説〕

(1)

事象 X：点 P が正の向きに $\frac{\pi}{2}$ 回転する

事象 Y：点 P が負の向きに $\frac{\pi}{2}$ 回転する

とすると事象 X が起こる確率は $\frac{1}{3}$ であり、事象 Y が起こる確率は $\frac{2}{3}$ である。 $n+1$ 秒後に点 P が点 A にいるのは n 秒後に点 P が点 D にいて事象 X が起こるか、または点 B にいて事象 Y が起こるかのいずれかである。これらは排反であり、それ以外に $n+1$ 秒後に点 P が点 A にいることはない。ゆえに

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}d_n + \frac{2}{3}b_n \qquad \cdots \textcircled{1}$$

である。同様に $b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$ に対しても、点 P が隣合う点に n 秒後にいて、移動する場合を考えると

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}c_n \qquad \cdots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}d_n \qquad \cdots \textcircled{3}$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{3}c_n + \frac{2}{3}a_n \qquad \cdots \textcircled{4}$$

である。①、③の辺々引いて、

$$a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n - d_n) \qquad \cdots \textcircled{5}$$

である。また①、③の辺々加えて、

$$a_{n+1} + c_{n+1} = b_n + d_n \qquad \cdots \textcircled{6}$$

である。また②、④に対しても同様に辺々の差と和をとることで

$$b_{n+1} - d_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_n - c_n) \qquad \cdots \textcircled{7}$$

$$b_{n+1} + d_{n+1} = a_n + c_n \qquad \cdots \textcircled{8}$$

である。⑤、⑦と⑥、⑧のそれぞれから

$$a_{n+2} - c_{n+2} = -\frac{1}{9}(a_n - c_n) \qquad \cdots \textcircled{9}$$

$$a_{n+2} + c_{n+2} = a_n + c_n \qquad \cdots \textcircled{10}$$

となる。 $a_1 = 0, c_1 = 0$ より $a_1 + c_1 = 0, a_1 - c_1 = 0$ である。ゆえに n が奇数の時、⑨、⑩と合わせて

$$\begin{aligned} a_n + c_n &= 0 \\ a_n - c_n &= 0 \end{aligned}$$

であるため、 $a_n = 0, c_n = 0$ である。ゆえに n が奇数の時、 $s_n = 0$ である。つぎに n が偶数の時、 $n+2$ 秒後に一度も点 C を通らず点 A にいる確率は n 秒後に一度も点 C を通らず点 A におり、事象 X と事象 Y が交互に起こる場合だけでそれ以外には存在しない。ゆえに

$$\begin{aligned} s_{n+2} &= \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)s_n \\ &= \frac{4}{9}s_n \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

である。また $b_1 = \frac{1}{3}, d_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{4}{9}, c_2 = \frac{5}{9}$ であるから、 $a_2 - c_2 = -\frac{1}{9}, a_2 + c_2 = 1$ である。

$n = 2k$ (k は自然数) とすると数列 $\{a_{2k} - c_{2k}\}$ は初項 $-\frac{1}{9}$ 、公比 $-\frac{1}{9}$ の等比数列で、数列

$\{a_{2k} + c_{2k}\}$ はつねに 1 の定数列である。よって

$$\begin{aligned} a_{2k} - c_{2k} &= \left(-\frac{1}{9}\right)^k \\ a_{2k} + c_{2k} &= 1 \end{aligned}$$

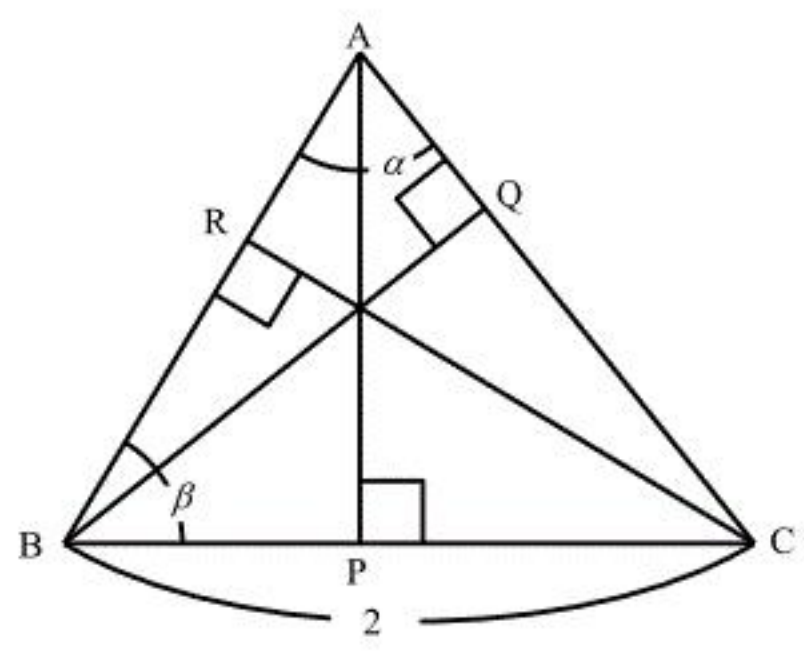
である。ゆえにこの 2 式より

$$a_{2k} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right\}$$

である。

【Ⅱ】

(1)



$\angle ARC = \angle APC = 90^\circ$ であるため、円周角の定理の逆より、4点A, P, R, Cは同一円周上に存在する。弧PCに対する円周角は等しいので、

$$\begin{aligned}\angle PRC &= \angle PAC \\ &= 90^\circ - \angle ACP \\ &= 90^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) \\ &= \alpha + \beta - 90^\circ\end{aligned}$$

である。同様に4点R, B, C, Qは同一円周上に存在する。弧CQに対する円周角は等しいので

$$\begin{aligned}\angle QRC &= \angle QBC \\ &= 90^\circ - \angle BCQ \\ &= 90^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) \\ &= \alpha + \beta - 90^\circ\end{aligned}$$

である。

(答) $\angle PRC = \alpha + \beta - 90^\circ, \angle QRC = \alpha + \beta - 90^\circ$

(2)

$\angle PRQ$ について

$$\begin{aligned}\angle PRQ &= \angle PRC + \angle QRC \\ &= 2(\alpha + \beta - 90^\circ)\end{aligned}$$

である。 $\angle PRB$ について

$$\begin{aligned}\angle PRB &= 90^\circ - \angle PRC \\ &= 90^\circ - (\alpha + \beta - 90^\circ) \\ &= 180^\circ - \alpha - \beta\end{aligned}$$

である。

(答) $\angle PRQ = 2(\alpha + \beta) - 180^\circ, \angle PRB = 180^\circ - \alpha - \beta$

(3)

$\triangle CAB \sim \triangle CPQ$ となることを示す。まず上記と同様にして4点A, B, P, Qは同一円周上にある。内接四角形の対角の和は 180° であるため、 $\angle BAC = \angle QPC, \angle ABC = \angle PQC$ が成立し、2角が等しいので $\triangle CAB \sim \triangle CPQ$ である。ゆえに対応する辺の比は等しいため、

$$\begin{aligned}\frac{PQ}{AB} &= \frac{PC}{AC} \\ &= \cos \angle ACP \\ &= \cos(180^\circ - \alpha - \beta) \\ &= -\cos(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{PQ}{AB} = -\cos(\alpha + \beta)$

(4)

3点A, R, Bは同一直線上にあるため、 $AB = AR + RB$ である。また

$$\begin{aligned}RB &= 2 \cos \angle ABC \\ &= 2 \cos \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AR &= \frac{CR}{\tan \angle BAC} \\ &= \frac{2 \sin \angle ABC}{\tan \alpha} \\ &= \frac{2 \sin \beta}{\tan \alpha}\end{aligned}$$

であるため、 $AB = 2\left(\cos \beta + \frac{\sin \beta}{\tan \alpha}\right)$ である。 $\frac{PQ}{AB} = -\cos(\alpha + \beta)$ であるため、

$$\begin{aligned}PQ &= -AB \cos(\alpha + \beta) \\ &= -2\left(\cos \beta + \frac{\sin \beta}{\tan \alpha}\right) \cos(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

である。

(答) $PQ = -2\left(\cos \beta + \frac{\sin \beta}{\tan \alpha}\right) \cos(\alpha + \beta)$

(5)

$\triangle AQR, \triangle BPR, \triangle CPQ$ の面積をそれぞれ S_3, S_4, S_5 とすると、

$$S_1 = S_2 + S_3 + S_4 + S_5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また上記と同様に $\triangle AQR \sim \triangle ABC, \triangle BPR \sim \triangle BAC$ である。(3)の結果より $\triangle CAB$ と $\triangle CPQ$ の相似比は $1 : \cos(180^\circ - \alpha - \beta)$ であるので、同様に考えると $\triangle ABC$ と $\triangle AQR$ の相似比は $1 : \cos \alpha$ であり、 $\triangle BAC$ と $\triangle BPR$ の相似比は $1 : \cos \beta$ である。よって面積比を考えると

$$\begin{aligned}S_3 &= S_1 \cos^2 \alpha \\ S_4 &= S_1 \cos^2 \beta \\ S_5 &= S_1 \cos^2(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

である。よって①より

$$\begin{aligned}S_1 &= S_2 + S_1(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2(\alpha + \beta)) \\ \Leftrightarrow \frac{S_2}{S_1} &= 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{S_2}{S_1} = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2(\alpha + \beta)$

【Ⅲ】

(1)

$\frac{5}{2}x^2-2x-6<0$ を解くと

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}x^2-2x-6 &< 0 \\ \Leftrightarrow 5x^2-4x-12 &< 0 \\ \Leftrightarrow (5x+6)(x-2) &< 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{6}{5} &< x < 2\end{aligned}$$

であるため、 $g(x)$ の絶対値を外すと

$$g(x)=\begin{cases}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x-6\left(x\leq-\frac{6}{5},2\leq x\right)\\x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+6\left(-\frac{6}{5}<x<2\right)\end{cases}$$

である。ゆえに $x\leq-\frac{6}{5}$ 、 $2\leq x$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ は一致する。また $-\frac{6}{5}<x<2$ で

$g(x)>f(x)$ であるため、求める面積は

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{6}{5}}^2\{g(x)-f(x)\}dx\\&=\int_{-\frac{6}{5}}^2\left\{\left(x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+6\right)-\left(x^3+\frac{5}{2}x^2-2x-6\right)\right\}dx\\&=\int_{-\frac{6}{5}}^2(-5x^2+4x+12)dx\\&=\int_{-\frac{6}{5}}^2-5(x-2)\left(x+\frac{6}{5}\right)dx\\&=\frac{-(-5)}{6}\left\{2-\left(-\frac{6}{5}\right)\right\}^3\\&=\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{16}{5}\right)^3\\&=\frac{2048}{75}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{2048}{75}$

(2)

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2+5x-2$$

である。点 $(t,f(t))$ における接線の方程式を求めると

$$\begin{aligned}y&=(3t^2+5t-2)(x-t)+t^3+\frac{5}{2}t^2-2t-6\\&=(3t^2+5t-2)x-2t^3-\frac{5}{2}t^2-6\end{aligned}$$

である。この接線が $(p,8)$ を通るので、

$$\begin{aligned}8&=(3t^2+5t-2)p-2t^3-\frac{5}{2}t^2-6\\&\Leftrightarrow 2t^3-\left(3p-\frac{5}{2}\right)t^2-5pt+2p+14=0\\&\Leftrightarrow 4t^3-(6p-5)t^2-10pt+4p+28=0\end{aligned}$$

である。この t についての方程式の実数解の個数と接線の本数が一致する。よって

$h(t)=4t^3-(6p-5)t^2-10pt+4p+28$ として、 $h(t)=0$ となる t の個数を求めればよい。 $h(t)$

を微分して

$$\begin{aligned}h'(t)&=12t^2-2(6p-5)t-10p\\&=2(6t+5)(t-p)\end{aligned}$$

である。ゆえに増減表を書くと、 $p>-\frac{5}{6}$ であるため

t	...	$-\frac{5}{6}$	...	p	...
$h'(t)$	+	0	-	0	+
$h(t)$	$\nearrow$	$h\left(-\frac{5}{6}\right)$	$\searrow$	$h(p)$	$\nearrow$

である。 $h\left(-\frac{5}{6}\right)$ 、 $h(p)$ を計算すると

$$\begin{aligned}h\left(-\frac{5}{6}\right)&=\frac{49}{6}p+\frac{3149}{108}\\h(p)&=-2p^3-5p^2+4p+28\end{aligned}$$

である。 $p>-\frac{5}{6}$ であることを利用すると、 $h\left(-\frac{5}{6}\right)$ については

$$\begin{aligned}h\left(-\frac{5}{6}\right)&>\frac{49}{6}\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{3149}{108}\\&=\frac{-49\cdot 5\cdot 3+3149}{108}\\&=\frac{2414}{108}\end{aligned}$$

であるため、 $h\left(-\frac{5}{6}\right)$ はこの範囲で常に正の値をとる。また $h(p)$ については

$$\begin{aligned}h(p)&=-2p^3-5p^2+4p+28\\&=-(p-2)(2p^2+9p+14)\\&=-(p-2)\left\{2\left(p+\frac{9}{4}\right)^2+\frac{31}{8}\right\}\end{aligned}$$

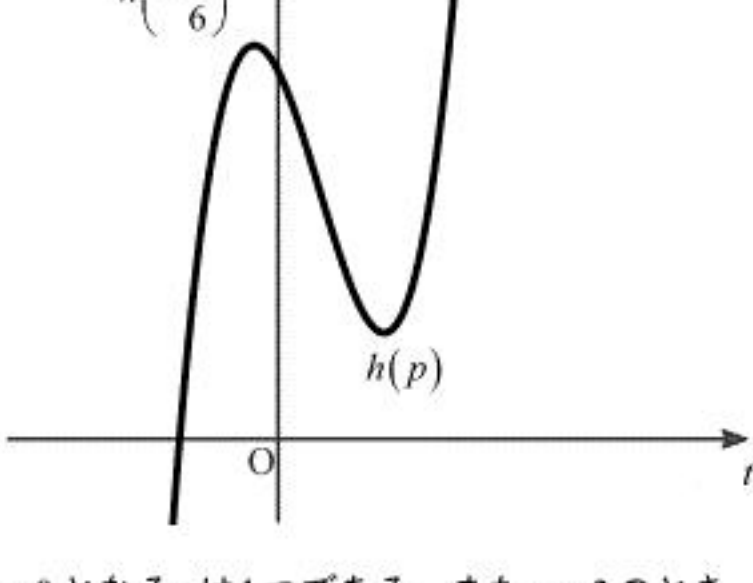
である。よって

$$h(p)>0\left(-\frac{5}{6}<p<2\right)$$

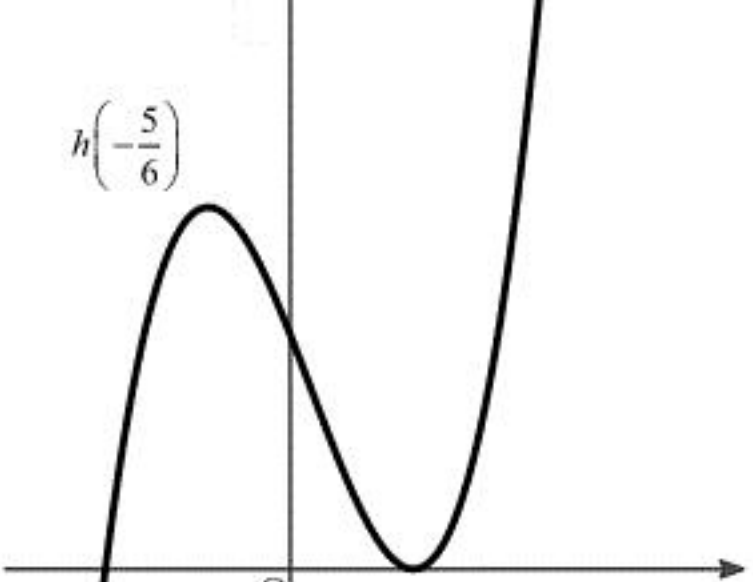
$$h(p)=0\left(p=2\right)$$

$$h(p)<0\left(p>2\right)$$

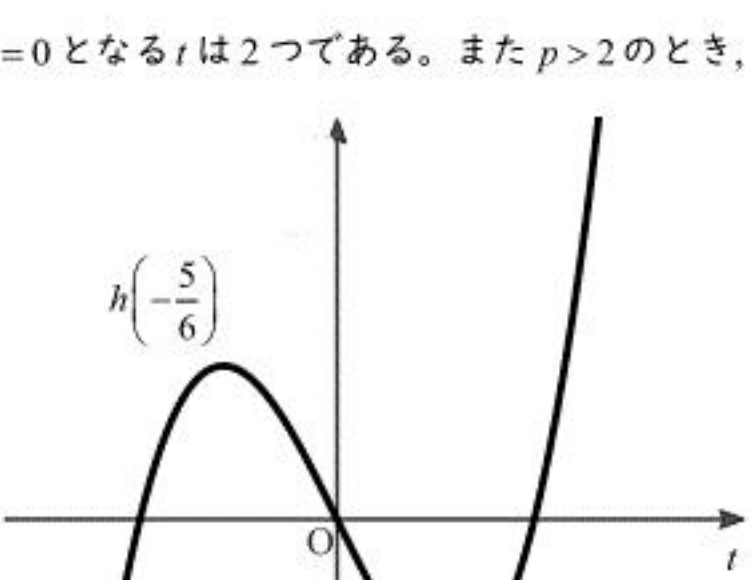
である。また $\lim_{t\rightarrow\pm\infty}h(t)=\pm\infty$ である。よって $-\frac{5}{6}<p<2$ のとき



のような概形をとり $t=0$ となる t は1つである。また $p=2$ のとき



のような概形をとり $t=0$ となる t は2つである。また $p>2$ のとき、



のような概形をとり $t=0$ となる t は3つである。

(答) $\begin{cases} 3\text{本}(p>2) \\ 2\text{本}(p=2) \\ 1\text{本}\left(-\frac{5}{6}<p<2\right) \end{cases}$

(3)

C_2 のグラフを書く。まず $x\leq-\frac{6}{5}$ 、 $2\leq x$ の範囲で微分して

$$\begin{aligned}g'(x)&=3x^2+5x-2\\&=(3x-1)(x+2)\end{aligned}$$

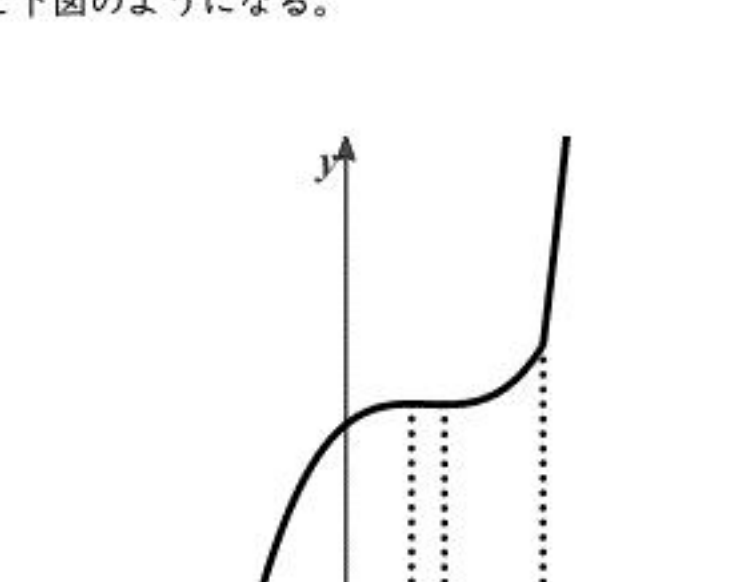
である。つぎに $-\frac{6}{5}<x<2$ の範囲では

$$\begin{aligned}g'(x)&=3x^2-5x+2\\&=(3x-2)(x-1)\end{aligned}$$

である。ゆえに増減表を書くと

x		-2		$-\frac{6}{5}$		$\frac{2}{3}$		1		2	
$g(x)'$	+	0	-		+	0	-	0	+		+
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{216}{125}$	$\nearrow$	$\frac{176}{27}$	$\searrow$	$\frac{13}{2}$	$\nearrow$	8	$\nearrow$

よってグラフを書くと下図のようになる。



よって $y=k$ との交点が3つとなるような k の値の範囲は

$$\begin{aligned}g\left(-\frac{6}{5}\right)<k<g(-2),\,g(1)<k<g\left(\frac{2}{3}\right)\\&\Leftrightarrow -\frac{216}{125}<k<0,\,\frac{13}{2}<k<\frac{176}{27}\end{aligned}$$

である。

(答) $-\frac{216}{125}<k<0,\,\frac{13}{2}<k<\frac{176}{27}$