

【1】

【解答】

ア	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	イ	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	ウ	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	エ	1260
オ	1918	カ	4374	キ	$\frac{2(p^2+pq+q^2)}{3(p+q)}$		
ク	$\frac{2p^2q^2}{p+q}$	ケ	$(3x-4)^2$	コ	$p^2+4pq+q^2$		

【解説】

(1)

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より、 $0 < \sin \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $0 < \cos 2\theta < 1$ である。ゆえに

$$f(\theta) > 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sin \theta}(\cos 2\theta) > 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < \cos 2\theta < \sin^2 \theta \quad (\because 0 < \sin \theta < 1)$$

が成立する。このとき、 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ より

$$1 - 2\sin^2 \theta < \sin^2 \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < \sin^2 \theta$$

となる。ここで $0 < \sin \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ であることを考慮し、 $\sin \theta$ の値の範囲は $\frac{\sqrt{3}}{3} < \sin \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。また、 $f(\theta) = 3$ のとき

$$\cos 2\theta = \sin^3 \theta$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 \theta = \sin^3 \theta$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 \theta + 2\sin^2 \theta - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin \theta + 1)(\sin^2 \theta + \sin \theta - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = -1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となる。ここで $0 < \sin \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ であることより、求める $\sin \theta$ の値は $\sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ である。

(2) 1)

9 個の玉から 2 個の組を選ぶ選び方は ${}_9C_2 = 36$ (通り) である。また、残りの 7 個の玉から 3 個の組を選ぶ選び方は ${}_7C_3 = 35$ (通り) となる。残りの玉はすべて 4 個の組に入るため、2 個、3 個、4 個の 3 組に分ける分け方は $36 \cdot 35 = 1260$ (通り) である。次に、どの組も玉の個数が 2 個以上になるような分け方を考える。このような分け方は各組の個数が $(2, 3, 4)$ となるもの以外に $(2, 2, 5)$ 、 $(3, 3, 3)$ となるものが存在する。

[1] $(2, 2, 5)$ と分ける場合

まず 2 個の玉の組には区別があるとして考える。9 個の玉から 2 個の組を選ぶ選び方は ${}_9C_2 = 36$ (通り) である。また、残りの 7 個の玉から 2 個の組を選ぶ選び方は ${}_7C_2 = 21$ (通り) となる。ゆえに、このような分け方は $36 \cdot 21 = 756$ (通り) である。いま、2 個の玉の組には区別がないから、この場合の場合の数は $\frac{756}{2!} = 378$ (通り) である。

[2] $(3, 3, 3)$ と分ける場合

(a) と同様にして考える。9 個の玉から 3 個の玉を選ぶ選び方は ${}_9C_3 = 84$ (通り) である。また、残りの 6 個の玉から 3 個の玉を選ぶ選び方は ${}_6C_3 = 20$ (通り) となる。ゆえに、この場合の場合の数は $\frac{84 \cdot 20}{3!} = 280$ (通り) である。

以上 [1]、[2] と前の結果より、求める分け方は $1260 + 378 + 280 = 1918$ (通り) となる。

2)

番号が 1, 2, 3 の玉が入る組の選び方は $3! = 6$ (通り) である。残りの 6 個の玉の入りは、それぞれの玉が A, B, C のどの組に入るかを考えて $3^6 = 729$ (通り) となる。したがって、求める分け方は $6 \cdot 729 = 4374$ (通り) である。

(3)

$f'(x) = 3x^2$ であることより、点 P における曲線 C の接線の方程式は、

$$y = f'(p)(x - p) + f(p)$$

$$= 3p^2(x - p) + p^3$$

$$= 3p^2x - 2p^3$$

となる。同様にして、点 Q における曲線 C の接線の方程式は $y = 3q^2x - 2q^3$ となる。ゆえに、点 R の x 座標は

$$3p^2x - 2p^3 = 3q^2x - 2q^3$$

$$\Leftrightarrow (3p^2 - 3q^2)x = 2p^3 - 2q^3$$

$$\Leftrightarrow 3(p + q)(p - q)x = 2(p - q)(p^2 + pq + q^2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2(p^2 + pq + q^2)}{3(p + q)} \quad (\because p \neq q, p + q \neq 0)$$

である。また、点 R は直線 $y = 3p^2x - 2p^3$ 上の点であるため、点 R の y 座標は

$$y = 3p^2 \cdot \frac{2(p^2 + pq + q^2)}{3(p + q)} - 2p^3$$

$$= \frac{2p^2(p^2 + pq + q^2) - 2p^3(p + q)}{p + q}$$

$$= \frac{2p^2q^2}{p + q}$$

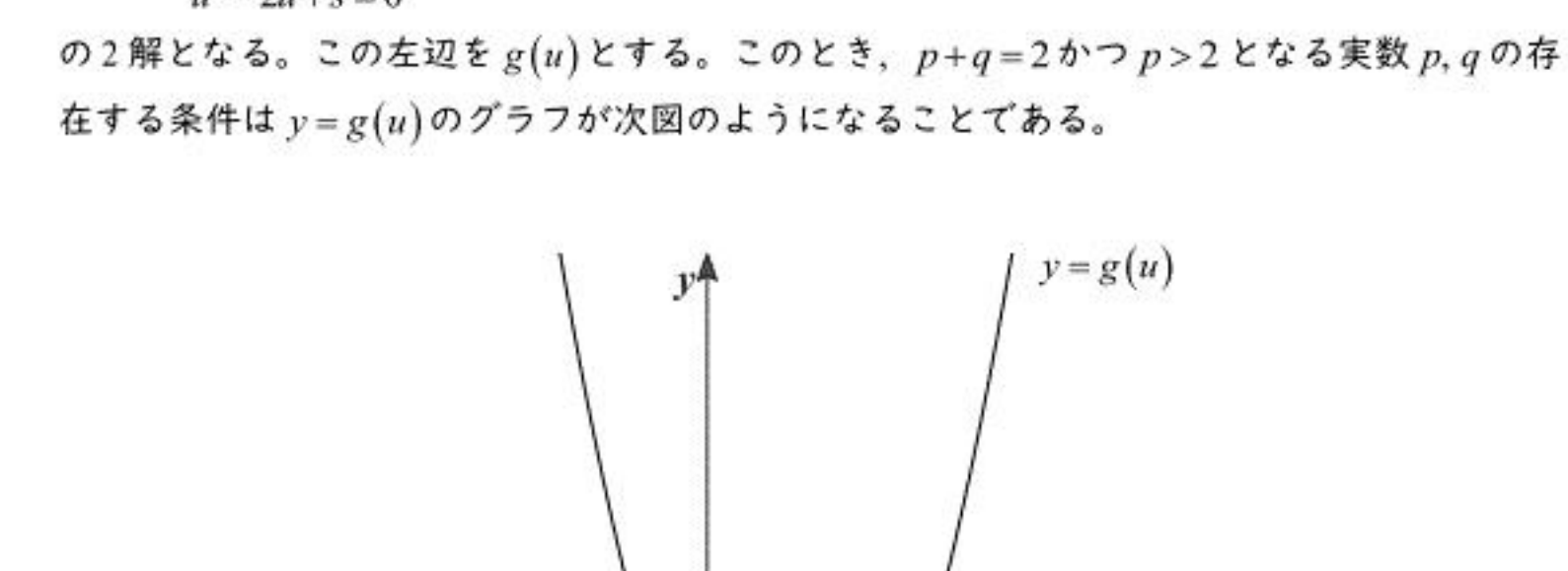
となる。したがって、点 R の座標は $\left(\frac{2(p^2 + pq + q^2)}{3(p + q)}, \frac{2p^2q^2}{p + q} \right)$ と表される。

1)

$pq = s$ とおくと、 $p + q = 2$ より、解と係数の関係から p, q は u の 2 次方程式

$$u^2 - 2u + s = 0$$

の 2 解となる。この左辺を $g(u)$ とする。このとき、 $p + q = 2$ かつ $p > 2$ となる実数 p, q の存在する条件は $y = g(u)$ のグラフが次図のようになることである。



したがって、条件は

$$\begin{cases} g(2) : s < 0 \\ \text{頂点} : g(1) = -1 + s < 0 \end{cases}$$

となるため、これらの共通範囲を考えると $s < 0$ となる。

このもとで、点 R の座標を (X, Y) とすると、 $p + q = 2$ より

$$\begin{cases} X = \frac{2(p^2 + pq + q^2)}{3(p + q)} \\ Y = \frac{2p^2q^2}{p + q} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{(p + q)^2 - pq}{3} \\ Y = p^2q^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{4 - s}{3} \\ Y = s^2 \end{cases}$$

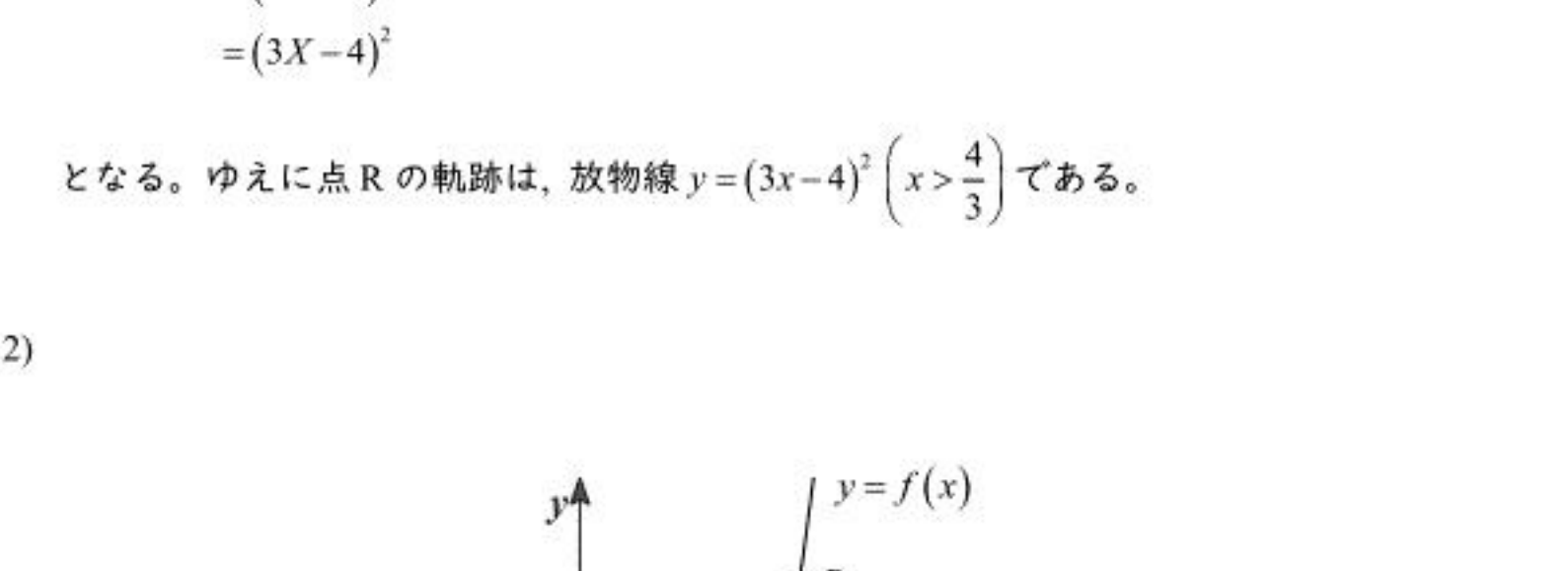
となることより、 $s = 4 - 3X$ である。ここで $s < 0$ より、 $4 - 3X < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} < X$ となる。このとき $Y = s^2$ に $s = 4 - 3X$ を代入し

$$Y = (4 - 3X)^2$$

$$= (3X - 4)^2$$

となる。ゆえに点 R の軌跡は、放物線 $y = (3x - 4)^2 \left(x > \frac{4}{3} \right)$ である。

2)



3 点 P, Q, R の位置関係は前図のようになるため、求める面積 S は

$$S = \int_q^X \{x^3 - (3q^2x - 2q^3)\} dx + \int_X^p \{x^3 - (3p^2x - 2p^3)\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}q^2x^2 + 2q^3x \right]_q^X + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}p^2x^2 + 2p^3x \right]_X^p$$

$$= \frac{3}{2}(p^2 - q^2)X^2 - 2(p^3 - q^3)X + \frac{3}{4}(p^4 - q^4)$$

$$= (p - q) \left\{ \frac{3}{2}(p + q)X^2 - 2(p^2 + pq + q^2)X + \frac{3}{4}(p + q)(p^2 + q^2) \right\}$$

$$= (p - q) \left[\frac{2(p^2 + pq + q^2)^2}{3(p + q)} - \frac{4(p^2 + pq + q^2)^2}{3(p + q)} + \frac{3(p^2 + pq + q^2)^2 - (pq)^2}{4(p + q)} \right]$$

$$= \frac{(p - q)}{12(p + q)} \{ (p^2 + pq + q^2)^2 - 9(pq)^2 \}$$

$$= \frac{(p - q)}{12(p + q)} (p^2 + 4pq + q^2)(p^2 - 2pq + q^2)$$

$$= \frac{(p - q)^3}{12(p + q)} (p^2 + 4pq + q^2)$$

となる。

【II】

(1)

$a=4, b=\frac{9}{2}$ であるとき、 $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-8x+1$ となる。ゆえに

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 24x^2 + 36x - 8 \\ &= 4(x-2)(x^2-4x+1) \\ &= 4(x-2)(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ゆえに $x=2$ で $f(x)$ は極大値をとり、その値は

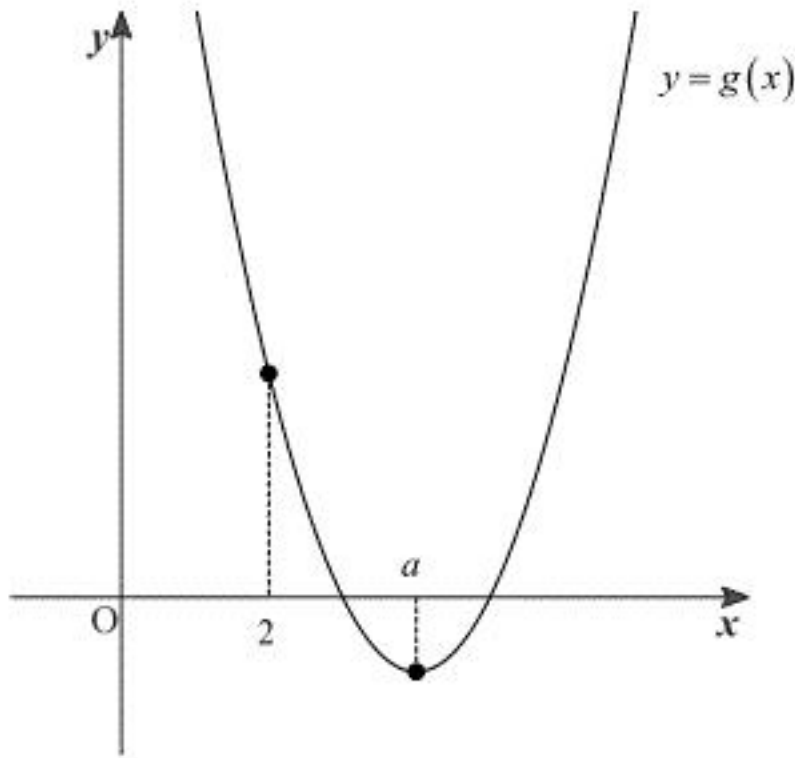
$$\begin{aligned} f(2) &= 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

である。

(答) 9

(2)

2 次方程式 $g(x)=0$ が異なる 2 つの 2 以上の解を持つための条件は $y=g(x)$ のグラフが次図のようになることである。



したがって、条件は

$$\begin{cases} \text{端点: } g(2) \geq 0 \\ \text{頂点: } g(a) < 0 \\ \text{軸: } a > 2 \end{cases}$$

となるため

$$\begin{cases} 4-4a+c \geq 0 \\ c-a^2 < 0 \\ a > 2 \end{cases}$$

であり、すなわち

$$\begin{cases} 4a-4 \leq c < a^2 \\ 2 < a \end{cases}$$

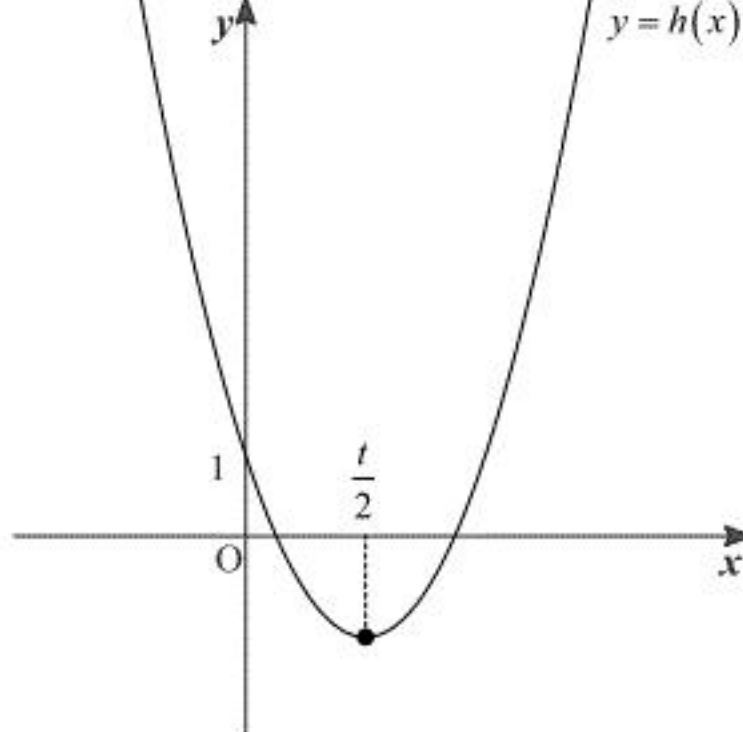
となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} 4a-4 \leq c < a^2 \\ 2 < a \end{cases}$$

(3)

$x > 0$ であるとき、 $t = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0$ である。ゆえに、 x の 2 次方程式 $x^2 - tx + 1 = 0$ が

少なくとも 1 つ正の解を持つような t の値の範囲を求めればよい。 $h(x) = x^2 - tx + 1$ とおくと、 $h(0) = 1$ であることより、 $y = h(x)$ のグラフが次図のようになればよい。



したがって、条件は

$$\begin{cases} \text{軸: } \frac{t}{2} > 0 \\ \text{頂点: } h\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \frac{t^2}{4} \leq 0 \end{cases}$$

となるため、これを解き $t \geq 2$ を得る。また

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x^2} &= x^2 - 2ax + 4b - \frac{2a}{x} + \frac{1}{x^2} \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4b - 2 \\ &= t^2 - 2at + 4b - 2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t \geq 2, \quad \frac{f(x)}{x^2} = t^2 - 2at + 4b - 2$$

(4)

(3) の結果より、方程式 $h(x)=0 \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0$ は $t=2$ のとき正の重解を持ち、 $t > 2$ のとき相

異なる 2 つの正の解を持つ。ここで、 $t_1 \neq t_2$ のとき x の方程式 $x + \frac{1}{x} = t_1, x + \frac{1}{x} = t_2$ が共通解

$\alpha (> 0)$ をもつと仮定すると、 $\alpha + \frac{1}{\alpha} = t_1, \alpha + \frac{1}{\alpha} = t_2, t_1 = st_2$ ($s \neq 1$) とおける。このとき、

$$\begin{aligned} t_1 &= st_2 \\ \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} &= s\alpha + \frac{s}{\alpha} \\ \Leftrightarrow \frac{(1-s)(\alpha^2+1)}{\alpha} &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= 1 \quad (\because \alpha^2+1 > 0) \end{aligned}$$

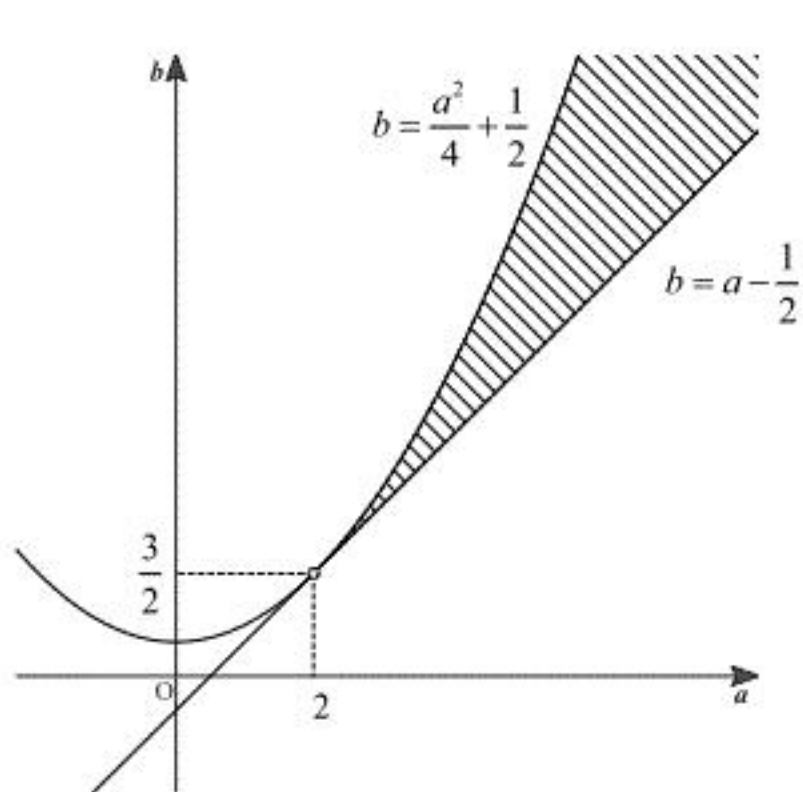
となり、 $s \neq 1$ に矛盾する。よって、 $t_1 \neq t_2$ のとき x は共通解を持たないので、 $f(x)=0$ が異

なる 4 つの正の解を持つ必要十分条件は、 $\frac{f(x)}{x^2} = t^2 - 2at + 4b - 2$ の右边を $p(t)$ としたとき、

t の方程式 $p(t)=0$ が $t > 2$ の範囲に相異なる 2 つの実数解を持つことである。ゆえに、求める条件は(2)と同様に考えて

$$\begin{aligned} &\begin{cases} p(2) > 0 \\ p(a) < 0 \\ a > 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -4a+4b+2 > 0 \\ -a^2+4b-2 < 0 \\ a > 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a - \frac{1}{2} < b < \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2} \\ a > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

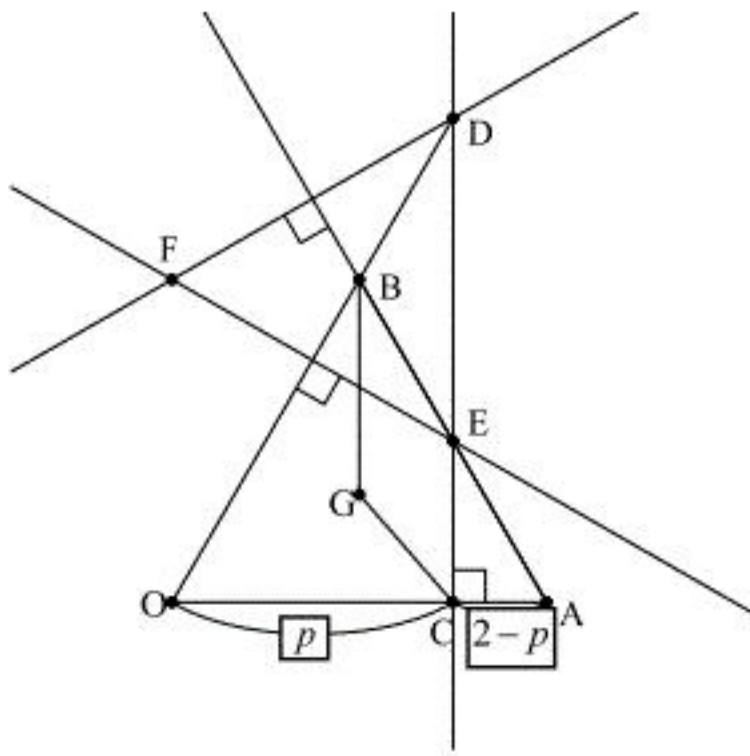
となる。したがってこれを ab 平面上に図示し、次図斜線部を得る。ただし境界は含まない。



(答) 前図斜線部(境界を除く)

【Ⅲ】

(1)



線分 OC の長さは $\frac{P}{p+(2-p)} \cdot 1 = \frac{P}{2}$ である。また、 $\triangle OCD$ は $\angle OCD = 90^\circ$ 、 $\angle DOC = 60^\circ$ の直

角三角形であるため

$$OD \sin \angle ODC = OC$$

$$\Leftrightarrow OD \sin 30^\circ = OC$$

$$\Leftrightarrow OD \cdot \frac{1}{2} = OC$$

$$\Leftrightarrow OD = p$$

となる。

$$(\text{答}) \quad OC = \frac{P}{2}, OD = p$$

(2)

E は線分 AB 上の点であるため、 $0 < s < 1$ として $\overrightarrow{OE} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}$ と表される。また、E は線分 CD 上の点でもあるため、 $0 < t < 1$ として $\overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OD}$ とも表される。ここで、(1)の

結果より $\overrightarrow{OC} = \frac{p}{2}\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OD} = p\vec{b}$ であるため、 $\overrightarrow{OE} = \frac{pt}{2}\vec{a} + p(1-t)\vec{b}$ となる。 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ は 1 次独立である

ため、係数を比較し

$$\begin{cases} s = \frac{pt}{2} \\ 1-s = p(1-t) \end{cases}$$

となる。これを解き、 $(s, t) = \left(p-1, \frac{2(p-1)}{p}\right)$ が得られる。したがって、

$$\overrightarrow{OE} = (p-1)\vec{a} + (2-p)\vec{b} \text{ となる。また、} \overrightarrow{OF} = u\vec{a} + v\vec{b} \text{ とおくと}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{FD} = -u\vec{a} + (p-v)\vec{b} \\ \overrightarrow{FE} = (p-1-u)\vec{a} + (2-p-v)\vec{b} \end{cases}$$

が成立する。ここで直線 AB と直線 FD、直線 OB と直線 FE はそれぞれ垂直であるため、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ に注意して、}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \{-u\vec{a} + (p-v)\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \\ \{(p-1-u)\vec{a} + (2-p-v)\vec{b}\} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u|\vec{a}|^2 + (-u-p+v)\vec{a} \cdot \vec{b} + (p-v)|\vec{b}|^2 = 0 \\ (p-1-u)\vec{a} \cdot \vec{b} + (2-p-v)|\vec{b}|^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(-u+v-p) = 0 \\ \frac{1}{2}(u+2v+p-3) = 0 \end{cases} \quad \left(\because |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u-v = -p \\ u+2v = -p+3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u = -p+1 \\ v = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ゆえに $\overrightarrow{OF} = (-p+1)\vec{a} + \vec{b}$ である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = (p-1)\vec{a} + (2-p)\vec{b}, \quad \overrightarrow{OF} = (-p+1)\vec{a} + \vec{b}$$

(3)

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ であるため

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} \\ &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) - \{(-p+1)\vec{a} + \vec{b}\} \\ &= \left(\frac{1}{3} + p - 1\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - 1\right)\vec{b} \\ &= \left(p - \frac{2}{3}\right)\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OF} \\ &= \frac{p}{2}\vec{a} - \{(-p+1)\vec{a} + \vec{b}\} \\ &= \left(\frac{p}{2} + p - 1\right)\vec{a} - \vec{b} \\ &= \left(\frac{3}{2}p - 1\right)\vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

であるので、 $\overrightarrow{FC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FG}$ が成立する。ゆえに 3 点 C, F, G は 1 つの直線上に存在する。

(証明終)

(4)

$\triangle OAB$ は正三角形であるから $BG \perp OA$ となる。ゆえに四角形 BECG は BG と EC が平行で

あるような台形である。ここで $BG = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ である。また、 $\triangle ACE$ に注目し

$$\begin{aligned} EC &= AC \cdot \tan \angle 60^\circ \\ &= \left(1 - \frac{p}{2}\right) \cdot \sqrt{3} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}p + \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。さらに、BG と EC を底辺と見た時の台形 BECG の高さは

$$OC - \frac{1}{2} = \frac{p-1}{2}$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}p + \sqrt{3}\right) \right\} \cdot \frac{p-1}{2} \\ &= \frac{1}{24} (-3\sqrt{3}p + 8\sqrt{3})(p-1) \\ &= \frac{1}{24} (-3\sqrt{3}p^2 + 11\sqrt{3}p - 8\sqrt{3}) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \left(p - \frac{11}{6}\right)^2 + \frac{25}{288} \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(p) = -\frac{\sqrt{3}}{8} \left(p - \frac{11}{6}\right)^2 + \frac{25}{288} \sqrt{3}$$

(5)

(4)の結果より、 $S(p)$ は $p = \frac{11}{6}$ のときに最大値 $\frac{25}{288} \sqrt{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } \frac{25}{288} \sqrt{3} \quad \left(p = \frac{11}{6} \text{ のとき}\right)$$