

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ
	$\frac{2k^3(5-k)^2}{625}$	$1-\frac{k^5}{3125}$	$\frac{10k^3(n-k)^2}{n^5}$
	エ	オ	
	$\frac{104}{625}$	$\frac{1}{6}$	
(2)	カ	キ	ク
	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
	ケ	コ	
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	

【解説】

(1)

$p_5(k)$ は黒玉 k 個、白玉 $5-k$ 個が入った袋から黒玉を 5 回中 3 回取り出す確率であるため

$$\begin{aligned} p_5(k) &= {}_5C_3 \cdot \left(\frac{k}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5-k}{5}\right)^2 \\ &= \frac{2k^3(5-k)^2}{625} \end{aligned}$$

となる。また、 $q_5(k)$ はこの袋から 5 回とも黒玉を取り出す事象の余事象の確率であり

$$\begin{aligned} q_5(k) &= 1 - \left(\frac{k}{5}\right)^5 \\ &= 1 - \frac{k^5}{3125} \end{aligned}$$

である。さらに、 $p_n(k)$ は黒玉 k 個、白玉 $n-k$ 個が入った袋から黒玉を 5 回中 3 回取り出す確率であるため

$$\begin{aligned} p_n(k) &= {}_nC_3 \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 \\ &= \frac{10k^3(n-k)^2}{n^5} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} r_5 &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 p_5(k) \\ &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 \frac{2k^3(5-k)^2}{625} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{625} (1^3 \cdot 4^2 + 2^3 \cdot 3^2 + 3^3 \cdot 2^2 + 4^3 \cdot 1^2) \\ &= \frac{2}{3125} (16 + 72 + 108 + 64) \\ &= \frac{104}{625} \end{aligned}$$

である。さらに、区分求積法により

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} r_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{10k^3(n-k)^2}{n^5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 10 \left(\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \\ &= \int_0^1 10x^3(1-x)^2 dx \\ &= 10 \int_0^1 x^3(x^2 - 2x + 1) dx \\ &= 10 \int_0^1 (x^5 - 2x^4 + x^3) dx \\ &= 10 \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$y(t)=0$ とするとき

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{8} &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{1}{12} \\ \Leftrightarrow t &= \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

となるため、これを $x(t)$ の式に代入し

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3 - \frac{3}{4} \cdot \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \\ &= \mp \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ (複号同順)} \end{aligned}$$

となる。ゆえに C と x 軸との交点は $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{9}, 0\right)$ である。また

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3t^2 - \frac{3}{4} \\ \frac{dy}{dt} &= -3t \end{aligned}$$

であるため、 $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{9}, 0\right)$ に対応する t の値が $t = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ であることも踏まえると、この点

における接線の傾きは

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-3\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}{3\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - \frac{3}{4}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \\ &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。次に、 $y(t_1)=y(t_2)$ のとき

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}t_1^2 + \frac{1}{8} &= -\frac{3}{2}t_2^2 + \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow t_1^2 &= t_2^2 \\ \therefore t_2 &= -t_1 \text{ (}\because t_1 \neq t_2\text{)} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $t_1 < t_2$ より

$$\begin{aligned} t_1 &< -t_1 \\ \Leftrightarrow t_1 &< 0 \end{aligned}$$

である。このとき、 $t_2 = -t_1$ を $x(t_1)=x(t_2)$ の式に代入し

$$\begin{aligned} t_1^3 - \frac{3}{4}t_1 &= t_2^3 - \frac{3}{4}t_2 \\ \Leftrightarrow t_1^3 - \frac{3}{4}t_1 &= (-t_1)^3 - \frac{3}{4}(-t_1) \\ \Leftrightarrow t_1^3 - \frac{3}{4}t_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t_1 \left(t_1^2 - \frac{3}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow t_1 &= 0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $t_1 < 0$ であることより $t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。また、このとき

$$\begin{aligned} t_2 &= -t_1 \\ \Leftrightarrow t_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。さらに、 C_0 の長さを L とすると

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\left(3t^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + (-3t)^2} dt \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{9t^4 + \frac{9}{2}t^2 + \frac{9}{16}} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\left(3t^2 + \frac{3}{4}\right)^2} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(3t^2 + \frac{3}{4}\right) dt \left(\because 3t^2 + \frac{3}{4} > 0\right) \\ &= 2 \left[t^3 + \frac{3}{4}t\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= b\{(-\sin x)\sin x + (1 + \cos x)\cos x\} \\&= b(-\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x) \\&= b(2\cos^2 x + \cos x - 1) \\&= b(2\cos x - 1)(\cos x + 1)\end{aligned}$$

であるため,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= -1, \frac{1}{2} \quad (\because b > 0)\end{aligned}$$

となる。ゆえに $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲でこれを満たす x は $x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ となる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$$

(2)

$b > 0$ であることに注意すると, (1) の結果より $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲での $f(x)$ の増減は次の通りとなる。

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ゆえに, $0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の最小値は $f(0)$ または $f\left(\frac{5}{3}\pi\right)$ であるが

$$\begin{aligned}f(0) &= a \\ f\left(\frac{5}{3}\pi\right) &= a - \frac{3\sqrt{3}}{4}b\end{aligned}$$

であり, $b > 0$ より $f(0) > f\left(\frac{5}{3}\pi\right)$ となるため, $0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の最小値は

$f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = a - \frac{3\sqrt{3}}{4}b$ となる。この値が $\frac{1}{2}$ となるとき

$$\begin{aligned}a - \frac{3\sqrt{3}}{4}b &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{3\sqrt{3}}{4}b + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

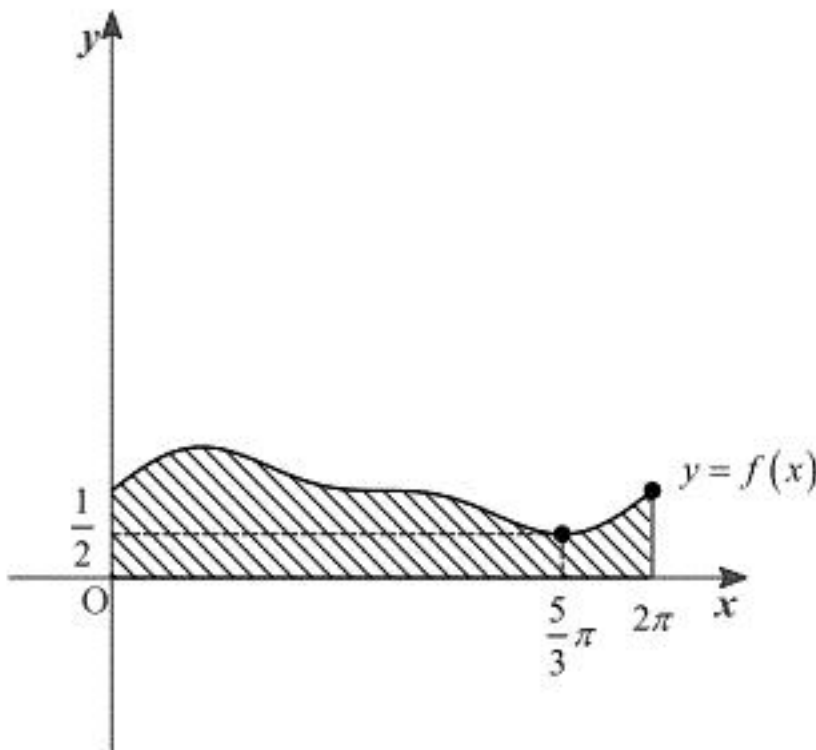
である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{3\sqrt{3}}{4}b + \frac{1}{2}$$

(3)

$0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の最小値が $\frac{1}{2}$ であることに注意すると, $y = f(x)$ のグラフと x 軸

との位置関係は次図のようになる。



ゆえに, S の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{2\pi} \{a + b(1 + \cos x)\sin x\} dx \\&= a \int_0^{2\pi} dx + b \int_0^{2\pi} (1 + \cos x) \left\{ -(1 + \cos x)' \right\} dx \\&= a[x]_0^{2\pi} + b \left[-\left(\frac{1}{2}\right)(1 + \cos x)^2 \right]_0^{2\pi} \\&= 2a\pi\end{aligned}$$

となる。この値が 2π となるとき

$$\begin{aligned}2a\pi &= 2\pi \\ \Leftrightarrow a &= 1\end{aligned}$$

である。したがって, (2) の結果より

$$\begin{aligned}1 &= \frac{3\sqrt{3}}{4}b + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow b &= \frac{2\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

となる。以上をまとめると, a, b の値は $(a, b) = \left(1, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(1, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$$

(4)

求める体積を V とすると

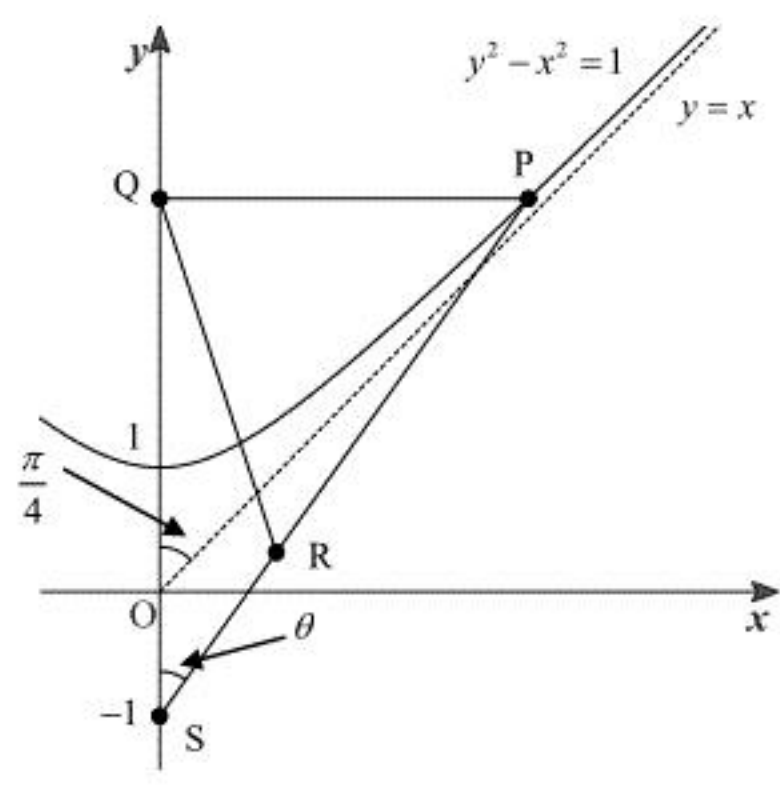
$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^{2\pi} \{f(x)\}^2 dx \\&= \pi \int_0^{2\pi} \{a + b(1 + \cos x)\sin x\}^2 dx \\&= \pi \int_0^{2\pi} \{a^2 + 2ab(1 + \cos x)\sin x + b^2(1 + \cos x)^2 \sin^2 x\} dx \\&= \pi \left\{ a^2 \int_0^{2\pi} dx - 2ab \int_0^{2\pi} (1 + \cos x)(1 + \cos x)' dx + b^2 \int_0^{2\pi} (\cos^2 x \sin^2 x + 2\cos x \sin^2 x + \sin^2 x) dx \right\} \\&= \pi \left[a^2[x]_0^{2\pi} - ab \left[(1 + \cos x)^2 \right]_0^{2\pi} + b^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\sin^2 2x}{4} + 2\sin^2 x \cdot (\sin x)' + \frac{1 - \cos 2x}{2} \right\} dx \right] \\&= \pi \left[2\pi a^2 + b^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1 - \cos 4x}{8} + 2\sin^2 x \cdot (\sin x)' + \frac{1 - \cos 2x}{2} \right\} dx \right] \\&= \pi \left[2\pi a^2 + b^2 \left[\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{2\pi} \right] \\&= \pi \left(2\pi a^2 + \frac{5}{4} \pi b^2 \right) \\&= \pi \left\{ 2\pi \cdot 1^2 + \frac{5}{4} \pi \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} \right)^2 \right\} \\&= \pi \cdot \frac{59}{27} \pi \\&= \frac{59}{27} \pi^2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{59}{27} \pi^2$$

[IV]

(1)



双曲線 $y^2 - x^2 = 1$ の第一象限における漸近線は直線 $y = x$ である。直線 $y = x$ が y 軸となす角が $\frac{\pi}{4}$ であることより、 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ である。ここで、点 P の x 座標が 1 であるとき、 y 座標は

$$y^2 - 1 = 1$$
$$\therefore y = \sqrt{2} \quad (\because y > 0)$$

となるため、 $QO = \sqrt{2}$ となる。したがって $QS = \sqrt{2} + 1$, $QP = 1$ であるため

$$\tan \theta_1 = \frac{QP}{QS}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$
$$= \sqrt{2} - 1$$

となる。ゆえに

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2 \tan \theta_1}{1 - \tan^2 \theta_1}$$
$$= \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{1 - (\sqrt{2} - 1)^2}$$
$$= \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{2\sqrt{2} - 2}$$
$$= 1$$

となる。また、 $\triangle PQR$ が正三角形となるとき $\angle RPQ = \frac{\pi}{3}$ であるため

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \angle RPQ$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\pi}{6}$$

である。したがって

$$\tan 2\theta_2 = \tan \frac{\pi}{3}$$
$$= \sqrt{3}$$

となる。

(答) $\tan 2\theta_1 = 1, \tan 2\theta_2 = \sqrt{3}$

(2)

点 P の座標を (X, Y) ($X > 0, Y > 0$) とおくと、点 P は双曲線 $y^2 - x^2 = 1$ 上の点であるため

$$Y^2 - X^2 = 1$$

となる。このとき、 $QS = Y + 1$, $QP = X$ となるため $\tan \theta = \frac{X}{Y + 1}$ である。ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より $\tan \theta \neq 1$ であることに注意し

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$
$$= \frac{\frac{2X}{Y + 1}}{1 - \left(\frac{X}{Y + 1}\right)^2}$$
$$= \frac{2X(Y + 1)}{(Y + 1)^2 - X^2}$$
$$= \frac{2X(Y + 1)}{Y^2 - X^2 + 2Y + 1}$$
$$= \frac{2X(Y + 1)}{2Y + 2} \quad (\because Y^2 - X^2 = 1)$$
$$= X$$

が成り立つ。したがって

$$X = \tan 2\theta$$
$$= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

である。また、このとき

$$Y^2 - X^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow Y^2 = \tan^2 2\theta + 1$$
$$\Leftrightarrow Y^2 = \frac{1}{\cos^2 2\theta}$$

となるが、 $Y > 0$, $\frac{1}{\cos 2\theta} > 0$ ($\because 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) であるため $Y = \frac{1}{\cos 2\theta}$ となる。ゆえに、点 P の座標は $\left(\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}, \frac{1}{\cos 2\theta}\right)$ である。

(答) $\left(\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}, \frac{1}{\cos 2\theta}\right)$

(3)

$P(X, Y)$, $S(0, -1)$ であるから、

$$\overline{OR} = r\overline{OS} + (1 - r)\overline{OP}$$
$$= ((1 - r)X, (1 - r)(Y + 1) - 1)$$

となる。ゆえに点 R の座標を (X_R, Y_R) とおくと

$$\begin{cases} X_R = (1 - r)X \\ Y_R = (1 - r)(Y + 1) - 1 \end{cases}$$

である。ここで、 $QR = QP$ であるため

$$QR^2 = QP^2$$
$$\Leftrightarrow \{(1 - r)X - 0\}^2 + \{(1 - r)(Y + 1) - 1 - Y\}^2 = X^2$$
$$\Leftrightarrow X^2(1 - r)^2 + (Y + 1)^2 r^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \{X^2 + (Y + 1)^2\} r^2 - 2X^2 r = 0$$

となる。ここで、 $X^2 + (Y + 1)^2 > 0$, $r \neq 0$ であるため

$$r = \frac{2X^2}{X^2 + (Y + 1)^2}$$
$$= \frac{2(Y^2 - 1)}{Y^2 - 1 + (Y + 1)^2} \quad (\because X^2 = Y^2 - 1)$$
$$= \frac{2(Y + 1)(Y - 1)}{(Y + 1)\{(Y - 1) + (Y + 1)\}}$$
$$= \frac{2(Y - 1)}{2Y} \quad (\because Y + 1 > 0)$$
$$= 1 - \frac{1}{Y}$$
$$= 1 - \cos 2\theta$$

となる。

(答) $r = 1 - \cos 2\theta$

(4)

(3)の結果より

$$\begin{cases} X_R = (1 - r)X \\ Y_R = (1 - r)(Y + 1) - 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_R = \cos 2\theta \cdot \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \\ Y_R = \cos 2\theta \left(\frac{1}{\cos 2\theta} + 1\right) - 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_R = \sin 2\theta \\ Y_R = \cos 2\theta \end{cases}$$

となるため、点 R の座標は $(\sin 2\theta, \cos 2\theta)$ と表される。ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より

$0 < X_R < 1$, $0 < Y_R < 1$ である。また、このとき

$$X_R^2 + Y_R^2 = \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta$$
$$= 1$$

が成立するため、点 R の描く軌跡の方程式は、円弧: $x^2 + y^2 = 1$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ となる。さ

らに、(1)の結果より $2\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $2\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ であるため、求める軌跡の部分の長さは

$$1 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$$

となる。

点 R の座標: $(\sin 2\theta, \cos 2\theta)$

(答) 点 R の描く軌跡の方程式: 円弧: $x^2 + y^2 = 1$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$

$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ の部分の長さ: $\frac{\pi}{12}$