

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	
	$\frac{5^{n-3}(n-1)(n-2)}{2 \cdot 6^n}$	$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$	
	オ				
	$3 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$				
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	$\frac{\pi}{6}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\sqrt{6} \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$8\sqrt{6}$

【解説】

(1)

n 回目にちょうど3回目の3の目が出るのは、 $1\sim n-1$ 回目のうちちょうど2回3の目が出て、 n 回目に3の目が出るときであるから、その確率は、

$${}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{5^{n-3}(n-1)(n-2)}{2 \cdot 6^n}$$

となる。次に、 n 個の目の積が偶数となる事象は、 n 個の目の積が奇数となる事象の余事象であるので、 n 個の目の積が偶数となる確率は、

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。 n 個の目の積が4の倍数となる事象は、4の目が出ず1回だけ2または6の目が出る事象と、 n 個の目の積が奇数となる事象の余事象である。4の目が出ず1回だけ2または6の目が出る確率は、

$${}_nC_1\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}=\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であるから、 n 個の目の積が4の倍数となる確率は、

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。また、 n 回目までの最大値が4である確率は、 $1\sim 4$ の中から目が出る確率から $1\sim 3$ の中から目が出る確率を引いたものであるから

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。出た目の最大値と最小値の差が3となるのは、最大値が4、最小値が1となるとき、最大値が5、最小値が2となるとき、または最大値が6、最小値が3となるときである。最大値が4、最小値が1となる確率は、 $1\sim 4$ の中から目が出る確率から $1\sim 3$ の中から目が出る確率と $2\sim 4$ の中から目が出る確率を引き、 $2, 3$ の中から目が出る確率を足したものであるから、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

となる。最大値が5、最小値が2となる確率と最大値が6、最小値が3となる確率もこれに一致するから、求める確率は、

$$3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}i} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(3+\sqrt{3}i)}{12} \\ &= \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}i}{12} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}i \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

となるから、 $\theta=\frac{\pi}{6}$ である。よって、

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{z_1}{1-\alpha} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)i}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}i} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+6(\sqrt{2}-1)i}{\sqrt{6}-\sqrt{3}-i} \\ &= \frac{\{2\sqrt{3}+6(\sqrt{2}-1)i\}\{(\sqrt{6}-\sqrt{3})+i\}}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+1} \\ &= \frac{6(\sqrt{2}-1)+\{2\sqrt{3}+6\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)^2\}i-6(\sqrt{2}-1)}{10-6\sqrt{2}} \\ &= \frac{20\sqrt{3}-12\sqrt{6}}{10-6\sqrt{2}}i \\ &= 2\sqrt{3}i\end{aligned}$$

となるから、 γ の虚部は $2\sqrt{3}$ となる。ここで、 $z_{n+1}-\gamma=\alpha(z_n-\gamma)$ より、 z_{n+1} は γ を中心として、

z_n を $|\alpha|=\frac{2}{\sqrt{6}}$ 倍して $\frac{\pi}{6}$ 回転させたものである。 $z_n=\alpha^{n-1}(z_1-\gamma)+\gamma$ より、

$$\begin{aligned}|z_n-\gamma| &= |\alpha^{n-1}||z_1-\gamma| \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{n-1}\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{n-1}\sqrt{2+6} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{n-1}2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2}|z_1-\gamma||z_2-\gamma|\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2}|z_n-\gamma||z_{n+1}-\gamma|\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^n\cdot 8 \\ &= \sqrt{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(k+1)S_k &= \sum_{k=1}^n(k+1)\cdot\sqrt{6}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \sqrt{6}\sum_{k=1}^n(k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^k\end{aligned}$$

となる。 $\sum_{k=1}^n(k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^k=A_n$ とおくと、

$$\frac{2}{3}A_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^2+3\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+n\left(\frac{2}{3}\right)^n+(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$A_n=2\left(\frac{2}{3}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)^2+4\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

となる。①-②より、

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}A_n &= -2\left(\frac{2}{3}\right)-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}+(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \\ &= -\frac{4}{3}-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}+(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \\ &= -\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}+(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

となるから、 $A_n=4+4\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}-2(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n$ となる。ここで $n>2$ において

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\right)^n &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^n \\ &> 1+{}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)+{}_nC_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 1+\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{8}\end{aligned}$$

であるから、

$$0<(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{n+1}{1+\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{8}}$$

となる。 $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n+1}{1+\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{8}}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{2}+\frac{(n-1)}{8}}=0$ より、はさみうちの原理から

$$\lim_{n\rightarrow\infty}(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

となる。よって

$$\lim_{n\rightarrow\infty}A_n=\lim_{n\rightarrow\infty}\left[4+4\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}-2(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$=8$$

となり、したがって

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)S_k=\sqrt{6}\cdot 8$$

$$=8\sqrt{6}$$

となる。

【Ⅱ】

(1)

点 P は線分 BC を $t:1-t$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \\ &= (1-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より、点 P の座標は $(1-t, 2t, 0)$ となる。

(答) $(1-t, 2t, 0)$

(2)

点 R は線分 BC 上の点であるから、(1)より点 R の座標は $s (0 \leq s \leq 1)$ を用いて、 $(1-s, 2s, 0)$ と表すことができる。ここで、 $AR \perp BC$ より、

$$\begin{aligned}AR &\perp BC \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-s \\ 2s \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (s-1) + 4s &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

となるから、点 R の座標は $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$ となる。また、 $AR = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ となる。

(答) 点 R の座標: $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$, $AR = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

(3)

点 E、点 R はともに xy 平面上の点であるから、直線 ER は xy 平面上の直線であり、

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{RE} = 0 \text{ より, } \overrightarrow{RE} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (} k \text{ は実数) と表せる。よって}$$

$$\begin{aligned}AR &= ER \\ \Leftrightarrow \sqrt{k^2(2^2 + 1^2)} &= \frac{3\sqrt{5}}{5} \\ \Leftrightarrow 5k^2 &= \frac{9}{5} \\ \therefore k &= \pm \frac{3}{5}\end{aligned}$$

を得る。したがって、 $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RE} = \left(\frac{4}{5} \pm \frac{6}{5}, \frac{2}{5} \pm \frac{3}{5}, 0\right)$ (複号同順) となるところ、問題文の条

件より $q < 0$ であるから、点 E の座標は $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0\right)$ となる。

(答) $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0\right)$

(4)

線分 BC 上の点 P に対して、 $AR = ER$, $AR \perp BC$, $ER \perp BC$ より、

$$AP = \sqrt{AR^2 + RP^2} = \sqrt{ER^2 + RP^2} = EP \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。そして、直線 BC の方程式は $y = -2x + 2$ かつ $z = 0$ であり、直線 DE の方程式は

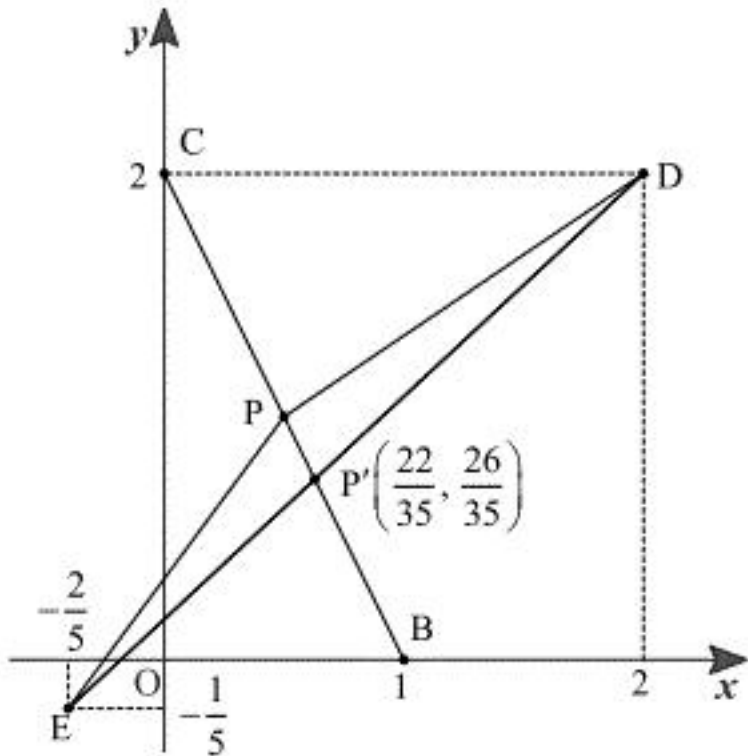
$(2, 2, 0), \left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0\right)$ を通るから $y = \frac{11}{12}x + \frac{1}{6}$ かつ $z = 0$ となる。直線 BC と直線 DE の交点を P' とすると、点 P' の座標は

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = \frac{11}{12}x + \frac{1}{6} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = \left(\frac{22}{35}, \frac{26}{35}, 0\right)$$

となり、これは下図の通り線分 BC 上に存在する。そして、線分 BC 上の点 P に対して、式①を使うと、

$$AP + PD = EP + PD \geq ED = EP' + P'D = AP' + P'D$$

が成り立つ。ただし、 $EP + PD \geq ED$ は下図のように $\triangle EPD$ に対して三角不等式を用いている。



したがって、 $AP + PD$ が最小となるのは $P = P'$ 、すなわち点 P の座標が $\left(\frac{22}{35}, \frac{26}{35}, 0\right)$ のときで

あり、その最小値は $DE = \sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{265}}{5}$ となる。

(答) 最小値: $\frac{\sqrt{265}}{5}$, 点 P の座標: $\left(\frac{22}{35}, \frac{26}{35}, 0\right)$

〔Ⅲ〕

(1)

$$3a_{n+1}=S_n(1-2S_{n+1})+1$$

に $n=1$ を代入すると、

$$3a_2=S_1(1-2S_2)+1$$

である。ここで、

$$S_1=a_1, S_2=a_1+a_2$$

であるから、

$$\begin{aligned} 3a_2 &= S_1(1-2S_2)+1 \\ \Leftrightarrow 3a_2 &= a_1\{1-2\cdot(a_1+a_2)\}+1 \\ \Leftrightarrow 3a_2 &= 2\cdot\{1-2\cdot(2+a_2)\}+1 \quad (\because a_1=2) \\ \Leftrightarrow 7a_2 &= -5 \\ \therefore a_2 &= -\frac{5}{7} \end{aligned}$$

が得られる。また、

$$\begin{aligned} S_2 &= a_1+a_2 \\ &= 2-\frac{5}{7} \\ &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad a_2=-\frac{5}{7}, S_2=\frac{9}{7}$$

(2)

$$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$$

であるから、

$$\begin{aligned} 3a_{n+1} &= S_n(1-2S_{n+1})+1 \\ \Leftrightarrow 3(S_{n+1}-S_n) &= S_n(1-2S_{n+1})+1 \\ \Leftrightarrow (2S_n+3)S_{n+1} &= 4S_n+1 \quad \cdots \cdots \text{①} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} 2S_n+3 &= 0 \\ \Leftrightarrow S_n &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

を仮定すると、①の左辺は0となるのに対し、右辺は-5となって矛盾する。したがって、

$$2S_n+3 \neq 0$$

であり、①は、

$$S_{n+1}=\frac{4S_n+1}{2S_n+3}$$

となる。 $S_{n+1}=f(S_n)$ と、 $f(x)$ が既約な分数式であるという条件から、

$$f(x)=\frac{4x+1}{2x+3}$$

である。

$$\text{(答)} \quad f(x)=\frac{4x+1}{2x+3}$$

(3)

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{4\cdot\frac{x+1}{\beta x+1}+1}{2\cdot\frac{x+1}{\beta x+1}+3} \\ &= \frac{4(x+1)+(\beta x+1)}{2(x+1)+3(\beta x+1)} \\ &= \frac{(\beta+4)x+5}{(3\beta+2)x+5} \end{aligned}$$

$$g(rx)=\frac{rx+1}{\beta rx+1}$$

であるから、 $\beta x+1 \neq 0, (3\beta+2)x+5 \neq 0, \beta rx+1 \neq 0$ において、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= g(rx) \\ \Leftrightarrow \frac{(\beta+4)x+5}{(3\beta+2)x+5} &= \frac{rx+1}{\beta rx+1} \\ \Leftrightarrow \{(\beta+4)x+5\}(\beta rx+1) &= \{(3\beta+2)x+5\}(rx+1) \\ \Leftrightarrow (\beta+4)\beta rx^2+5\beta rx+(\beta+4)x+5 &= (3\beta+2)rx^2+5rx+(3\beta+2)x+5 \\ \Leftrightarrow \{(\beta+2)rx+(5r-2)\}(\beta-1)x &= 0 \end{aligned}$$

となる。この式は有限個の x を除くすべての x で成立するため、恒等式であり、 $r \neq 0, \beta \neq 1$ で

あるから、

$$\begin{aligned} \begin{cases} (\beta+2)r=0 \\ 5r-2=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2 \\ r=\frac{2}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad \beta=-2, r=\frac{2}{5}$$

(4)

(3)より、

$$g(x)=\frac{x+1}{-2x+1}$$

$$f(g(x))=g\left(\frac{2}{5}x\right)$$

である。

$$g(T_n)=S_n$$

より、

$$\begin{aligned} f(g(T_n)) &= f(S_n) \\ \Leftrightarrow g\left(\frac{2}{5}T_n\right) &= S_{n+1} \end{aligned}$$

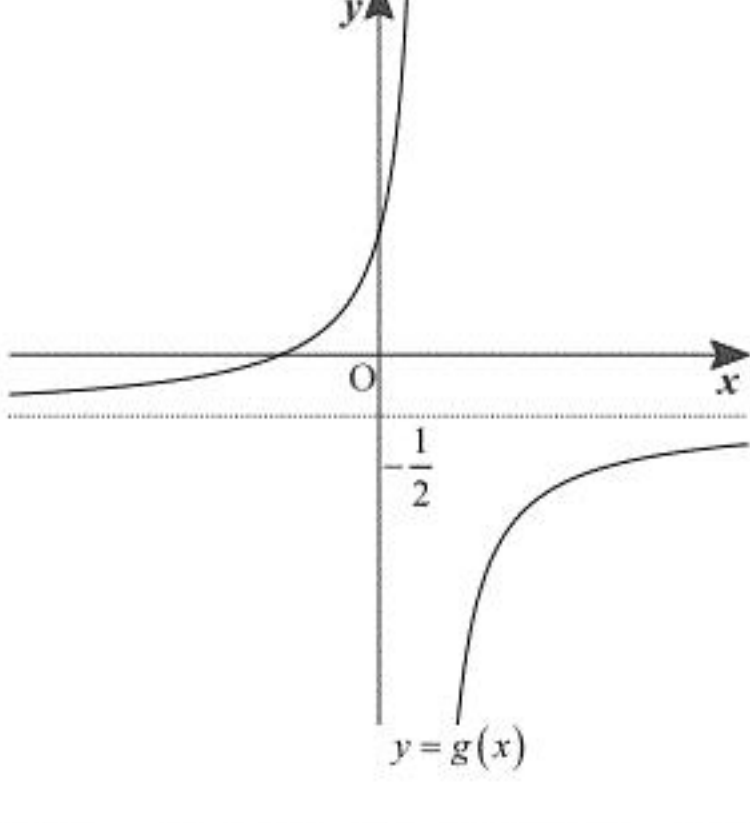
が成立し、さらに $S_{n+1}=g(T_{n+1})$ であるから、

$$g(T_{n+1})=g\left(\frac{2}{5}T_n\right)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x+1}{-2x+1} \\ &= -\frac{1}{2}+\frac{\frac{3}{2}}{-2x+1} \end{aligned}$$

であり、図に表すと以下のようになる。



$g(x)$ は分数関数であるから、 x と $g(x)$ が一対一に対応する。つまり、

$$g(x)=g(x') \Rightarrow x=x'$$

が成立する。よって、

$$g(T_{n+1})=g\left(\frac{2}{5}T_n\right) \Rightarrow T_{n+1}=\frac{2}{5}T_n$$

が得られる。ところで、

$$\begin{aligned} g(T_1) &= S_1 \\ \Leftrightarrow \frac{T_1+1}{-2T_1+1} &= 2 \\ \Leftrightarrow T_1+1 &= -4T_1+2 \\ \therefore T_1 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

であるから、 $\{T_n\}$ は初項 $\frac{1}{5}$ 、公比 $\frac{2}{5}$ の等比数列となり、 $\{T_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2^{n-1}}{5^n} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad T_n=\frac{2^{n-1}}{5^n}$$

(5)

$n \geq 2$ のとき、(4)より $T_{n-1}=\frac{5}{2}T_n$ が成立する。従って、

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= g(T_{n-1}) \\ &= \frac{T_{n-1}+1}{-2T_{n-1}+1} \\ &= \frac{\frac{5}{2}T_n+1}{-2\cdot\frac{5}{2}T_n+1} \\ &= \frac{5T_n+2}{-10T_n+2} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} a_n &= S_n-S_{n-1} \\ &= \frac{T_n+1}{-2T_n+1}-\frac{5T_n+2}{-10T_n+2} \\ &= \frac{(T_n+1)(-10T_n+2)-(5T_n+2)(-2T_n+1)}{(-2T_n+1)(-10T_n+2)} \\ &= \frac{-9T_n}{(-2T_n+1)(-10T_n+2)} \end{aligned}$$

となり、

$$\frac{a_n}{T_n}=\frac{-9}{(-2T_n+1)(-10T_n+2)} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

である。ここで、

$$T_n=\frac{2^{n-1}}{5^n}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n=0$$

となる。これと②式より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{T_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9}{(-2T_n+1)(-10T_n+2)} \\ &= \frac{-9}{1\cdot 2} \\ &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad -\frac{9}{2}$$

【Ⅳ】

(1)

関数 $y = \log x + \frac{1}{4x^2} \ (x > 0)$ について、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} \\ &= \frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{x^3} \end{aligned}$$

となるから、この関数の増減は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
y'		-	0	+
y		$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より、この関数は $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ において極小値

$$y = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2$$

をとる。

(答) 増減：前表，極小値： $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2$

(2)

$f'(x) = \frac{1}{x}$ より、 $y = f(x)$ 上の点 $(p, f(p)) \ (p > 0)$ における接線 ℓ_p の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(p)(x-p) + f(p) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{p}(x-p) + \log p \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{p}x + \log p - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = \frac{1}{p}x + \log p - 1$

(3)

$p > 0$ のもとで、

$$\begin{aligned} \ell_p \text{ が曲線 } y = g(x) \text{ に接する} \\ \Leftrightarrow x^2 + c = \frac{1}{p}x + \log p - 1 \text{ が重解を持つ} \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{p}x + c + 1 - \log p = 0 \text{ が重解を持つ} \end{aligned}$$

であるから、 $x^2 - \frac{1}{p}x + c + 1 - \log p = 0$ の判別式を D とおくと、 ℓ_p が曲線 $y = g(x)$ に接するた

めの条件は $D = 0$ である。

$$D = \left(-\frac{1}{p}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (c + 1 - \log p)$$

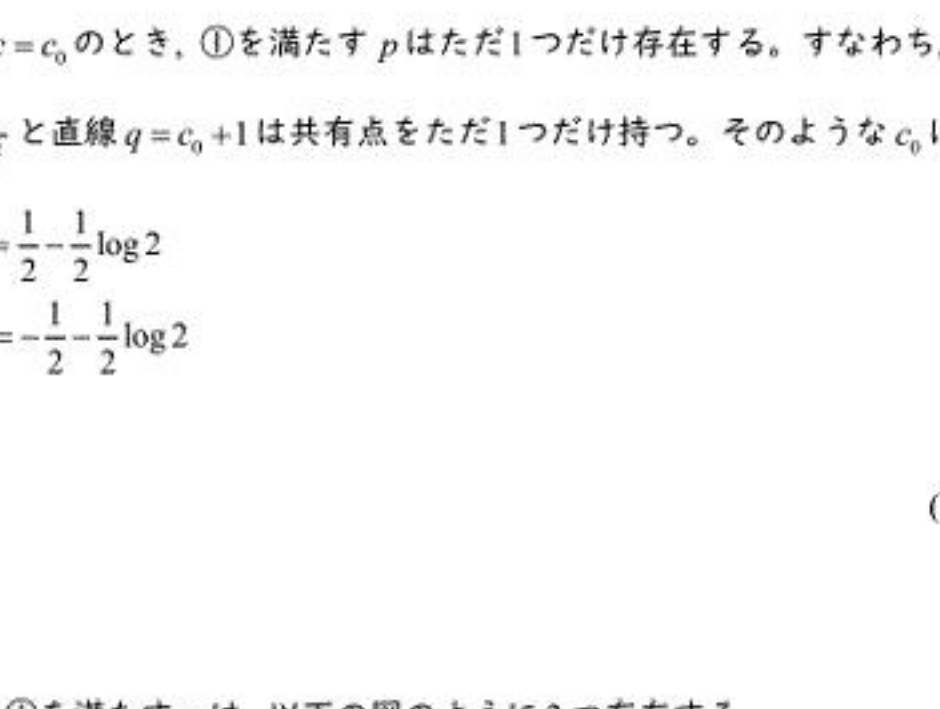
より、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow c + 1 &= \log p + \frac{1}{4p^2} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 pq 平面上の曲線 $q = \log p + \frac{1}{4p^2} \ (p > 0)$ と直線 $q = c + 1$ との共有点を考える。

(1)で調べた増減、及び $\lim_{p \rightarrow +0} \left(\log p + \frac{1}{4p^2}\right) = \infty$ 、 $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\log p + \frac{1}{4p^2}\right) = \infty$ であることより、

$q = \log p + \frac{1}{4p^2} \ (p > 0)$ のグラフは次図のようになる。



問題文より、 $c = c_0$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす p はただ1つだけ存在する。すなわち、曲線

$q = \log p + \frac{1}{4p^2}$ と直線 $q = c_0 + 1$ は共有点をただ1つだけ持つ。そのような c_0 は、前図より

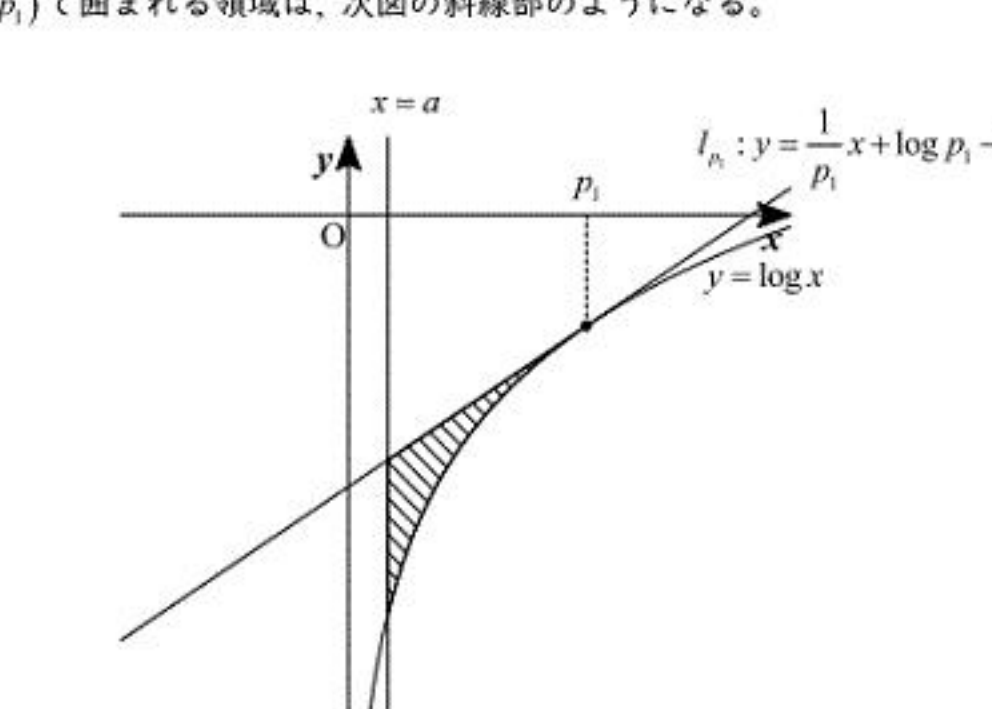
$$\begin{aligned} c_0 + 1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2 \\ \Leftrightarrow c_0 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

と分かる。

(答) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2$

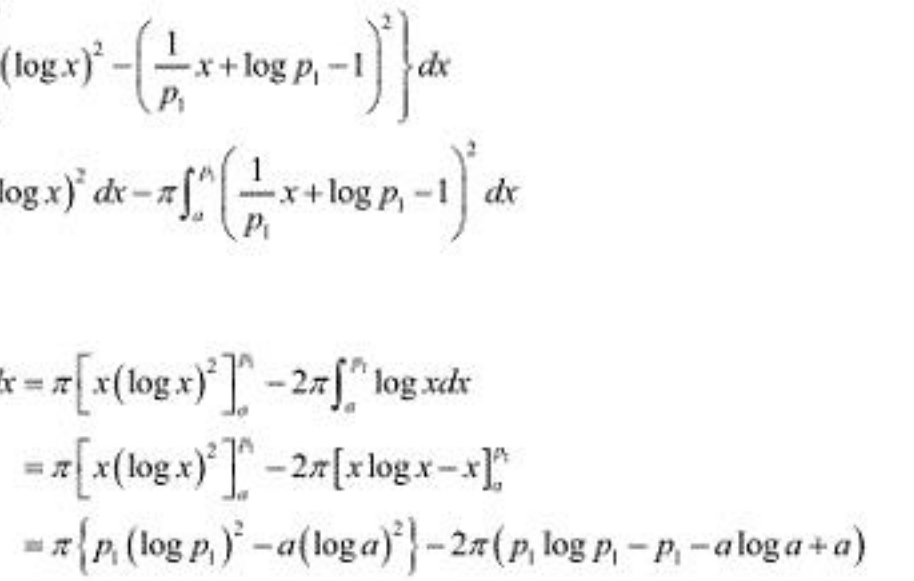
(4)

$c > c_0$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす p は、以下の図のように2つ存在する。



この条件の下で、 $p = p_1$ に対する接線 $\ell_{p_1} : y = \frac{1}{p_1}x + \log p_1 - 1$ と曲線 $y = f(x)$ 、および直線

$x = a \ (0 < a < p_1)$ で囲まれる領域は、次図の斜線部のようになる。



以上より、この領域が x 軸の周りに1回転してできる立体の体積は

$$\begin{aligned} V_1(a) &= \pi \int_a^{p_1} \left\{ (\log x)^2 - \left(\frac{1}{p_1}x + \log p_1 - 1 \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_a^{p_1} (\log x)^2 dx - \pi \int_a^{p_1} \left(\frac{1}{p_1}x + \log p_1 - 1 \right)^2 dx \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} \pi \int_a^{p_1} (\log x)^2 dx &= \pi \left[x(\log x)^2 \right]_a^{p_1} - 2\pi \int_a^{p_1} \log x dx \\ &= \pi \left[x(\log x)^2 \right]_a^{p_1} - 2\pi [x \log x - x]_a^{p_1} \\ &= \pi \left\{ p_1 (\log p_1)^2 - a (\log a)^2 \right\} - 2\pi (p_1 \log p_1 - p_1 - a \log a + a) \\ \pi \int_a^{p_1} \left(\frac{1}{p_1}x + \log p_1 - 1 \right)^2 dx &= \pi \left[\frac{p_1}{3} \left(\frac{1}{p_1}x + \log p_1 - 1 \right)^3 \right]_a^{p_1} \\ &= \frac{\pi}{3} p_1 \left\{ (\log p_1)^3 - \left(\frac{1}{p_1}a + \log p_1 - 1 \right)^3 \right\} \end{aligned}$$

より、これらを代入して、

$$\begin{aligned} V_1(a) &= \pi \int_a^{p_1} (\log x)^2 dx - \pi \int_a^{p_1} \left(\frac{1}{p_1}x + \log p_1 - 1 \right)^2 dx \\ &= \pi \left\{ p_1 (\log p_1)^2 - a (\log a)^2 \right\} - 2\pi (p_1 \log p_1 - p_1 - a \log a + a) - \frac{\pi}{3} p_1 \left\{ (\log p_1)^3 - \left(\frac{1}{p_1}a + \log p_1 - 1 \right)^3 \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\lim_{a \rightarrow +0} a(\log a)^2 = 0$ であること、及び $a < \frac{1}{e}$ において $|a \log a| < |a(\log a)^2|$ より、

$\lim_{a \rightarrow +0} a \log a = 0$ であることを利用すると、

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{a \rightarrow +0} V_1(a) \\ &= \pi p_1 (\log p_1)^2 - 2\pi (p_1 \log p_1 - p_1) - \frac{\pi}{3} p_1 \left\{ (\log p_1)^3 - (\log p_1 - 1)^3 \right\} \\ &= \pi p_1 (\log p_1)^2 - 2\pi p_1 \log p_1 + 2\pi p_1 - \pi p_1 (\log p_1)^2 + \pi p_1 \log p_1 - \frac{\pi}{3} p_1 \\ &= \pi p_1 \left(\frac{5}{3} - \log p_1 \right) \end{aligned}$$

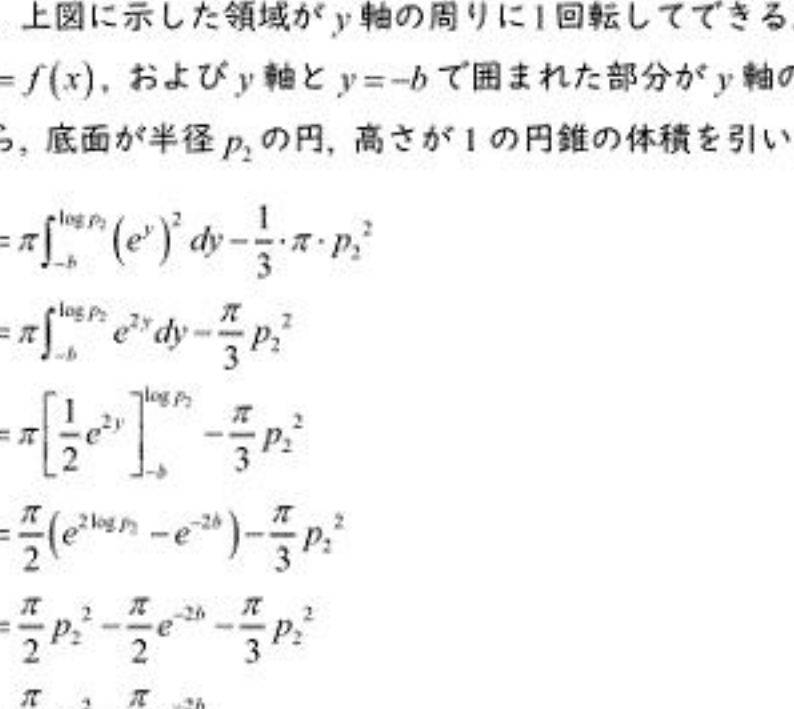
と計算できる。

(答) $\pi p_1 \left(\frac{5}{3} - \log p_1 \right)$

(5)

$c > c_0$ の条件の下で、 $p = p_2$ に対する接線 $\ell_{p_2} : y = \frac{1}{p_2}x + \log p_2 - 1$ と曲線 $y = f(x)$ 、および y

軸と直線 $y = -b \ (b > 0)$ で囲まれる領域は、次図の斜線部のようになる。



ここで、 $y = f(x)$ の方程式は

$$y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$$

と変形できる。上図に示した領域が y 軸の周りに1回転してできる立体の体積は、直線

$y = \log p_2$ と $y = f(x)$ 、および y 軸と $y = -b$ で囲まれた部分が y 軸の周りに1回転してできる

立体の体積から、底面が半径 p_2 の円、高さが1の円錐の体積を引いたものになるから、

$$\begin{aligned} V_2(b) &= \pi \int_{-b}^{\log p_2} (e^y)^2 dy - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot p_2^2 \\ &= \pi \int_{-b}^{\log p_2} e^{2y} dy - \frac{\pi}{3} p_2^2 \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_{-b}^{\log p_2} - \frac{\pi}{3} p_2^2 \\ &= \frac{\pi}{2} (e^{2 \log p_2} - e^{-2b}) - \frac{\pi}{3} p_2^2 \\ &= \frac{\pi}{2} p_2^2 - \frac{\pi}{2} e^{-2b} - \frac{\pi}{3} p_2^2 \\ &= \frac{\pi}{6} p_2^2 - \frac{\pi}{2} e^{-2b} \end{aligned}$$

と計算できる。以上より

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{b \rightarrow \infty} V_2(b) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{6} p_2^2 - \frac{\pi}{2} e^{-2b} \right) \\ &= \frac{\pi}{6} p_2^2 \end{aligned}$$

と分かる。ここで、(4)冒頭に示したグラフより、 $c \rightarrow c_0 + 0$ とすると

$$\begin{cases} p_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 \\ p_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \end{cases}$$

となることが分かるから、

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow c_0 + 0} \frac{\alpha}{\beta} &= \lim_{c \rightarrow c_0 + 0} \frac{\pi p_1 \left(\frac{5}{3} - \log p_1 \right)}{\frac{\pi}{6} p_2^2} \\ &= \lim_{c \rightarrow c_0 + 0} \frac{6 p_1 \left(\frac{5}{3} - \log p_1 \right)}{p_2^2} \\ &= \frac{6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{5}{3} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} \\ &= 10\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $10\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \log 2$