

【1】

【解答】

ア	3	イ	$3x^2+x+b-a$	ウ	$x^3-x^2+(b-a)x+a$
エ	-12	オ	-20	カ	3
キ	10	ク	$\frac{1}{2}$	ケ	$\frac{5}{28}$
				コ	$\frac{1}{14}$

【解説】

(1)

x の整式 $f(x)$ の次数が n (n は非負整数) であるとすると、 $f(x)$ は、

$$f(x)=\sum_{i=0}^nc_ix^i \text{ (各 } c_i \text{ は定数であり、 } c_n \neq 0 \text{)}$$

と表すことができる。いま、 $n \geq 4$ であると仮定すると、

$$f(x)=\sum_{i=0}^nc_ix^i=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\sum_{i=0}^{n-3}c_ix^i$$

であるから、 $f(x+1)-2f(x)+f(x-1)$ の $(n-2)$ 次の係数を d_{n-2} とすると、

$$\begin{aligned} d_{n-2} &=({}_nC_2 \cdot c_n+{}_nC_1 \cdot c_{n-1}+c_{n-2})-2c_{n-2}+({}_nC_2 \cdot c_n-{}_nC_1 \cdot c_{n-1}+c_{n-2}) \\ &=2 \cdot {}_nC_2 \cdot c_n (\neq 0) \end{aligned}$$

である。したがって、 $f(x+1)-2f(x)+f(x-1)$ の次数は、 $(n-2)$ 以上であることがわかり、 $n \geq 4$ より、与えられた等式

$$f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=6x-2$$

は成立しない。よって、 $f(x)$ の次数は4以上ではなく、

$$f(x)=\sum_{i=0}^3c_ix^i=c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0 \text{ (} c_0, c_1, c_2, c_3 \text{ は定数)}$$

と書ける。ここで、 $F(x)=f(x+1)-f(x)$ とすると、

$$F(x)=\sum_{i=0}^3c_i(x+1)^i-\sum_{i=0}^3c_ix^i=3c_3x^2+(3c_3+2c_2)x+(c_3+c_2+c_1)$$

と表せる。与えられた等式は、

$$f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=6x-2$$

$$\Leftrightarrow F(x)-F(x-1)=6x-2$$

$$\Leftrightarrow 6c_3x+2c_2=6x-2$$

と変形することができるから、係数を比較することで、 $c_3=1, c_2=-1$ が得られる。また、

$c_3 \neq 0$ より、 $f(x)$ の次数は3である。さらに、

$$\begin{aligned} c_1 &=c_1+c_2+c_3 \\ &=F(0) \\ &=f(1)-f(0) \\ &=b-a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_0 &=f(0) \\ &=a \end{aligned}$$

であるから、与式を満たすとき、

$$F(x)=3x^2+x+b-a$$

$$f(x)=x^3-x^2+(b-a)x+a$$

と表される。次に、関数 $y=f(x)$ が、 $x=2$ で極小値 $f(2)=-24$ をとるとき、極値についての条件から、

$$\begin{cases} f'(2)=0 \\ f(2)=-24 \end{cases}$$

が成り立つ。 $f'(x)=3x^2-2x+b-a$ より、この条件を満たす定数 a, b の値は、

$$\begin{cases} 8+b-a=0 \\ 4+2b-a=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-12 \\ b=-20 \end{cases}$$

と求まる。このとき、

$$f(x)=x^3-x^2-8x-12$$

$$f'(x)=3x^2-2x-8=(x-2)(3x+4)$$

より、 $f(x)$ の増減表を書くと、次のようになる。

x	...	$-\frac{4}{3}$	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	-24	$\nearrow$

増減表より、確かに $f(x)$ は $x=2$ で極小値 -24 をとるから、求める定数は $a=-12, b=-20$ である。

(2)

10 人の内当たりくじを引く5人の組み合わせの総数は、

$${}_{10}C_5=252 \text{ (通り)}$$

存在し、これらはすべて同様に確からしい。次に、 k 本目の当たりくじを n 人目が引くような組み合わせの総数を考える。ここで、

$$\text{「}n-1<k-1\text{」 または 「}10-n<5-k\text{」}$$

のとき、この事象は起こりえないから、そうでない場合のみを考える。これは、最初の $(n-1)$ 人が $(k-1)$ 本の当たりくじを引き、後ろの $(10-n)$ 人が $(5-k)$ 本の当たりくじを引くような組み合わせの総数を考えればよいから、

$${}_{n-1}C_{k-1} \cdot {}_{10-n}C_{5-k} \text{ (通り)}$$

である。したがって、 k 本目の当たりくじを n 人目が引く確率を $P(k, n)$ と表すと、

$$P(k, n)=\frac{{}_{n-1}C_{k-1} \cdot {}_{10-n}C_{5-k}}{{}_{10}C_5}$$

である。2 本目の当たりくじを引く確率が最も大きい人を求めるには、 $P(2, n)$ が最大となるような n の値を求めればよい。したがって、

$$g(n)={}_{n-1}C_1 \cdot {}_{10-n}C_3=\frac{(n-1)(10-n)(9-n)(8-n)}{6}$$

が最大となるような n の値を求める。ここで、 $k=2$ より、 $2 \leq n \leq 7$ の範囲で考えると、

$$g(2)=56, g(3)=70, g(4)=60, g(5)=40, g(6)=20, g(7)=6$$

となるから、2 本目の当たりくじを引く確率が最も大きいのは、

$$3 \text{ 番目にくじを引く人}$$

である。同様にして、5 本目の当たりくじを引く確率が最も大きい人を求めるには、

$$h(n)={}_{n-1}C_4 \cdot {}_{10-n}C_0=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}$$

が最大となるような n の値を求めればよい。 $k=5$ より、 $5 \leq n \leq 10$ の範囲で考えると、

$$h(5)=1, h(6)=5, h(7)=15, h(8)=35, h(9)=70, h(10)=126$$

となるから、5 本目の当たりくじを引く確率が最も大きいのは、

$$10 \text{ 番目にくじを引く人}$$

である。次に、A 君は3 番目、B 君は7 番目にそれぞれくじを引く場合について考える。3 番目にくじを引く A 君がどのくじを引くかは無作為であるから、A 君が当たりくじを引く確率

は、 $\frac{1}{2}$ である。また、B 君が3 本目の当たりくじを引く確率は、

$$P(3, 7)=\frac{{}_6C_2 \cdot {}_3C_2}{{}_{10}C_5}=\frac{5}{28}$$

となる。また、A 君が2 本目の当たりくじを引き、かつ B 君が4 本目の当たりくじを引くような組み合わせの総数は、2 人目までに当たりくじが1 本、4 人目から6 人目の間に当たりくじが1 本、8 人目以降で当たりくじが1 本引かれるような組み合わせの総数であるから、A 君が2 本目の当たりくじを引き、かつ B 君が4 本目の当たりくじを引くような確率は、

$$\frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_{10}C_5}=\frac{1}{14}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

72 を素因数分解すると、

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

であり、72 の正の約数は、

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)$$

を展開したときの各項に過不足なく対応する。よって、72 の正の約数の個数は $4 \cdot 3 = 12$ (個)

であり、その総和は、

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2) = 15 \cdot 13 = 195$$

である。

(答) 正の約数の個数:12 個, 正の約数の総和:195

(2)

$n (= p^a q^b)$ の正の約数は、

$$(p^0 + p^1 + \cdots + p^a)(q^0 + q^1 + \cdots + q^b)$$

を展開したときの各項に過不足なく対応する。したがって、 n の正の約数の個数は

$(a+1)(b+1)$ (個)であり、その総和は、

$$\begin{aligned} (p^0 + p^1 + \cdots + p^a)(q^0 + q^1 + \cdots + q^b) &= \left(\sum_{i=0}^a p^i \right) \left(\sum_{j=0}^b q^j \right) \\ &= \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{b+1} - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

である。

(答) 正の約数の個数: $(a+1)(b+1)$ 個, 正の約数の総和: $\frac{(p^{a+1} - 1)(q^{b+1} - 1)}{(p - 1)(q - 1)}$

(3)

$m (= p^a q^b r^c)$ の正の約数は、

$$(p^0 + p^1 + \cdots + p^a)(q^0 + q^1 + \cdots + q^b)(r^0 + r^1 + \cdots + r^c)$$

を展開したときの各項に過不足なく対応する。したがって、 m の正の約数の個数は

$(a+1)(b+1)(c+1)$ (個)である。よって、求める必要十分条件は、

m の正の約数の個数が奇数

$\Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1)$ が奇数

$\Leftrightarrow a, b, c$ のいずれもが偶数

である。

(答) a, b, c のいずれもが偶数であること

(4)

l を正の整数とする。このとき、

「 l の正の約数の個数が奇数」 $\Leftrightarrow$ 「 l は平方数」

を示す。まず、 l の正の約数の個数が奇数であるときを考える。いま、ある素数

$p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ および自然数 $s_1, s_2, \dots, s_k$ によって、 l を素因数分解したときの表記が、

$$l = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$$

と表せているとする。このとき、(2), (3)と同様に考えると、 l の正の約数の個数は、

$$(s_1 + 1)(s_2 + 1) \cdots (s_k + 1) \text{ (個)}$$

である。ここで、 l の正の約数の個数が奇数であるから、 $s_1, s_2, \dots, s_k$ はいずれも偶数である。

したがって、自然数 $t_1, t_2, \dots, t_k$ によって、

$$s_i = 2t_i \quad (1 \leq i \leq k)$$

と書き直すことができ、

$$\begin{aligned} l &= p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k} \\ &= p_1^{2t_1} p_2^{2t_2} \cdots p_k^{2t_k} \\ &= (p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k})^2 \end{aligned}$$

と表すことができるから、 l の正の約数の個数が奇数ならば、 l は平方数である。次に、 l が平方数であるとする。このとき、 l はある自然数 g の平方であるとする。すなわち、

$$l = g^2$$

である。ここで、ある素数 $q_1 < q_2 < \cdots < q_h$ および自然数 $u_1, u_2, \dots, u_h$ によって、 g を素因数分解したときの表記が、

$$g = q_1^{u_1} q_2^{u_2} \cdots q_h^{u_h}$$

と表せているとする。このとき、

$$\begin{aligned} l &= (q_1^{u_1} q_2^{u_2} \cdots q_h^{u_h})^2 \\ &= q_1^{2u_1} q_2^{2u_2} \cdots q_h^{2u_h} \end{aligned}$$

について、(3)と同様にして考えることで、 l の正の約数の個数は、

$$(2u_1 + 1)(2u_2 + 1) \cdots (2u_h + 1) \text{ (個)}$$

であるとわかる。ここで、 $u_1, u_2, \dots, u_h$ は自然数であったから、 $(2u_1 + 1)(2u_2 + 1) \cdots (2u_h + 1)$ は

奇数である。したがって、 l が平方数ならば、 l の正の約数の個数は奇数である。以上より、正

の約数の個数が奇数となる正の整数は、平方数であることが示された。

(答) 平方数

(5)

(4)より、1 以上 2020 以下の平方数の総和を求めればよい。ここで、

$$44^2 = 1936$$

$$45^2 = 2025$$

より、

$$44^2 < 2020 < 45^2$$

である。したがって、1 以上 2020 以下の平方数の総和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{44} k^2 &= \frac{1}{6} \cdot 44 \cdot (44 + 1) \cdot (2 \cdot 44 + 1) \\ &= 29370 \end{aligned}$$

である。

(答) 29370

【Ⅲ】

(1)

放物線上の接点の座標を $(t, f(t))$ とおく。 $f'(x) = 2x$ より、この点における放物線 C の接線の方程式は、

$$y - f(t) = f'(t)(x - t) \Leftrightarrow y = 2tx - t^2 - \frac{1}{4}$$

である。この接線が点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ を通るとき、

$$\sin \theta = 2t \cos \theta - t^2 - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t \cos \theta + \sin \theta + \frac{1}{4} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで、1つの t に対して1つの接線が対応するから、点 P から放物線 C に異なる2本の接線が引けるための条件は、 t に関する2次方程式①が異なる2つの実数解を持つことである。よって、①の判別式を D とすると、求める θ の値の範囲は

$$\frac{D}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta - \sin \theta - \frac{1}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \theta + \sin \theta - \frac{3}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right) \left(\sin \theta + \frac{3}{2} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \sin \theta < \frac{1}{2} \quad (\because -1 \leq \sin \theta \leq 1)$$

$$\therefore 0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$

である。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

(2)

点 P の x 座標を p と書くことにする。 q, r は点 P から放物線 C に引いた接線の接点の x 座標であるから、方程式①の2つの異なる実数解である。よって、解と係数の関係より、

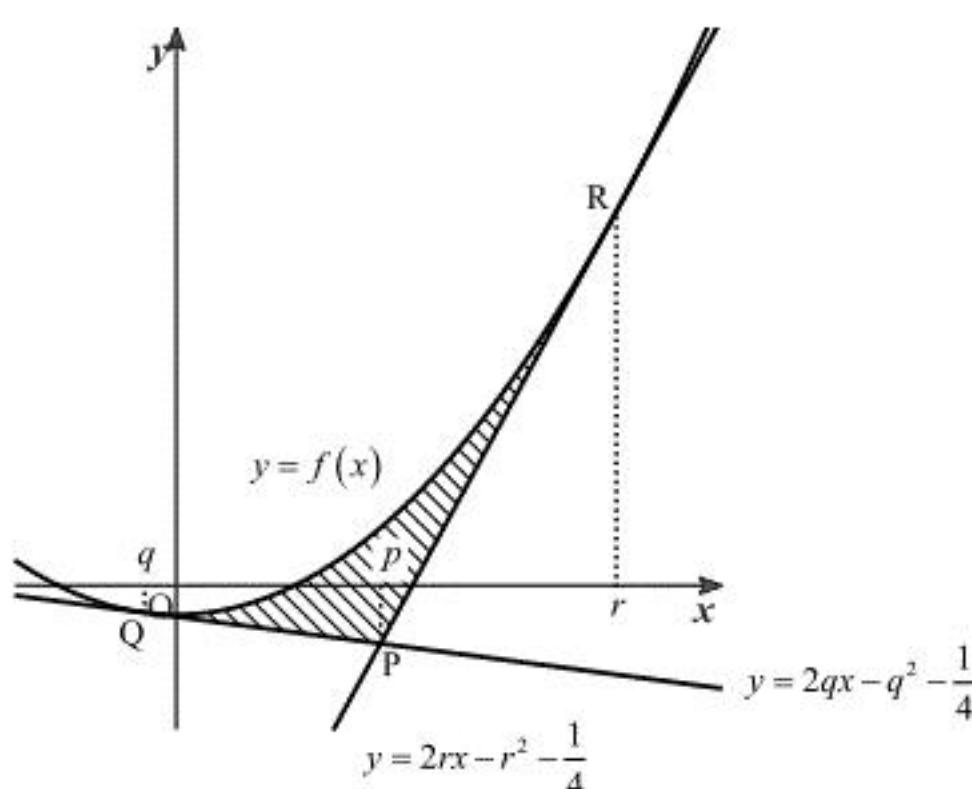
$$\begin{cases} q + r = 2 \cos \theta \\ qr = \sin \theta + \frac{1}{4} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、 $q < r$ であり $p = \cos \theta$ であることに注意すると、 $q + r = 2 \cos \theta$ より $q < p < r$ であることがわかる。また、(1)より直線 PQ, PR の方程式は、それぞれ

$$y = 2qx - q^2 - \frac{1}{4}$$

$$y = 2rx - r^2 - \frac{1}{4}$$

である。以下に、面積を求める領域を斜線部で示す。



上図より、求める面積 $S(\theta)$ は

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \int_q^p \left\{ f(x) - \left(2qx - q^2 - \frac{1}{4} \right) \right\} dx + \int_p^r \left\{ f(x) - \left(2rx - r^2 - \frac{1}{4} \right) \right\} dx \\ &= \int_q^p (x^2 - 2qx + q^2) dx + \int_p^r (x^2 - 2rx + r^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - qx^2 + q^2x \right]_q^p + \left[\frac{1}{3}x^3 - rx^2 + r^2x \right]_p^r \\ &= \left(\frac{1}{3}p^3 - qp^2 + q^2p \right) - \frac{1}{3}q^3 + \frac{1}{3}r^3 - \left(\frac{1}{3}p^3 - rp^2 + r^2p \right) \\ &= \frac{1}{3}(r^3 - q^3) - p(r^2 - q^2) + p^2(r - q) \end{aligned}$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned} (r - q)^2 &= (r + q)^2 - 4rq \\ &= 4 \cos^2 \theta - 4 \sin \theta - 1 \\ &= -4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 3 \end{aligned}$$

$$\therefore r - q = \sqrt{-4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 3} \quad (\because q < r)$$

であるから、 $S(\theta)$ は

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{3}(r^3 - q^3) - p(r^2 - q^2) + p^2(r - q) \\ &= \frac{1}{3}(r - q) \left\{ (r + q)^2 - rq \right\} - p(r - q)(r + q) + p^2(r - q) \\ &= \frac{1}{3}(r - q) \left\{ (r + q)^2 - rq - 3p(r + q) + 3p^2 \right\} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{-4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 3} \left(4 \cos^2 \theta - \sin \theta - \frac{1}{4} - 6 \cos^2 \theta + 3 \cos^2 \theta \right) \\ &= \frac{1}{12} \left(\sqrt{-4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 3} \right)^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(\theta) = \frac{1}{12} \left(\sqrt{-4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 3} \right)^3$$

(3)

(2)の結果より、 $S(\theta)$ が最大となるのは、 $-4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 3$ が最大となるときである。したがって、

$$-4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 3 = -4 \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \right)^2 + 4$$

と、 $-1 \leq \sin \theta < \frac{1}{2}$ より、

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$

であるときに、最大値 $\frac{1}{12}(\sqrt{4})^3 = \frac{2}{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値} : \frac{2}{3}, \quad \theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$