

【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{77}{153}$	$\frac{611}{1224}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	0	0	125	$3\sqrt{2}$	6

【解説】

(1)
 m が奇数となるのは、袋 α から札を1枚ずつ9回すべて取り出したときに、3回目に1, 3, 5, 7, 9のいずれかが書かれた札を取り出すときであるから、

$$P(A)=\frac{5}{9}$$
である。次に、 m が3の倍数となるのは m の各位の数字の和が3の倍数となるときであり、これを満たす3枚の札の番号を3で割った余りの組み合わせは
 $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2), (0, 1, 2)$
とあり、余り0, 1, 2それぞれに対応する札が3種類あり、 $(0, 1, 2)$ の場合は余りが出る順番も考えて

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot 3! \\ &= \frac{5}{14} \end{aligned}$$
となる。さらに、 $P(A \cap B)$ 、すなわち m が奇数かつ3の倍数となる確率を求める。札の番号を3で割った余りが0, 1, 2の場合に対して、奇数でもある番号の個数はそれぞれ2個、2個、1個であり、余りの組み合わせが $(0, 1, 2)$ の場合は3番目に1~9のどの数字がくるかは同様に確からしいから

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot 3! \cdot \frac{5}{9} \\ &= \frac{100}{9 \cdot 8 \cdot 7} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{100}{9 \cdot 8 \cdot 7}}{\frac{5}{9}} \\ &= \frac{5}{14} \end{aligned}$$
となる。次に、袋 β には

$$1_a, 2_a, \cdots, 8_a, 9_a$$

$$1_b, 2_b, \cdots, 8_b, 9_b$$

が書かれた札が入っているとする。

[1] 百の位に $6_a, 6_b, \cdots, 9_a, 9_b$ が位置するとき
必ず $n > 550$ となるから、この確率は

$$\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$
となる。

[2] 百の位に 5_a または 5_b が位置するとき
十の位が $5_a, 5_b$ の百の位と異なるものまたは $6_a, 6_b, \cdots, 9_a, 9_b$ であればよいから、この確率は

$$\frac{2}{18} \cdot \frac{9}{17} = \frac{1}{17}$$
となる。

[3] 百の位に $1_a, 1_b, \cdots, 4_a, 4_b$ が位置するとき
必ず $n < 550$ となるので不適である。

以上[1], [2], [3]より

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{4}{9} + \frac{1}{17} \\ &= \frac{77}{153} \end{aligned}$$

となる。最後に $P(D)$ を求める。袋 α には1~9の番号が1枚ずつ、袋 β には1~9の番号が2枚ずつ入っていることから対称性より、ある m に対して $m > n$ となる n の個数と、 $1110 - m < n$ となる n の個数は等しい。したがって、これを全ての m について考えれば、 $m > n$ となる (m, n) の組み合わせの数と、 $m < n$ となる (m, n) の組み合わせの数が等しいとわかるため、 $m > n$ となる確率と、 $m < n$ となる確率は等しい。よって、 $m = n$ となる確率を p をおくと

$$\begin{aligned} 2P(D) + p &= 1 \\ \Leftrightarrow P(D) &= \frac{1-p}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで $m = n$ となるとき、ある m に対し、 m の桁の数字がすべて異なることから、 n は a, b の違いにより 2^3 通りの場合がある。よって、袋からの札の取り出し方が $_{18}P_3$ 通りであることから、

$$\begin{aligned} p &= \frac{8}{_{18}P_3} \\ &= \frac{8}{18 \cdot 17 \cdot 16} \\ &= \frac{1}{612} \end{aligned}$$

である。以上より

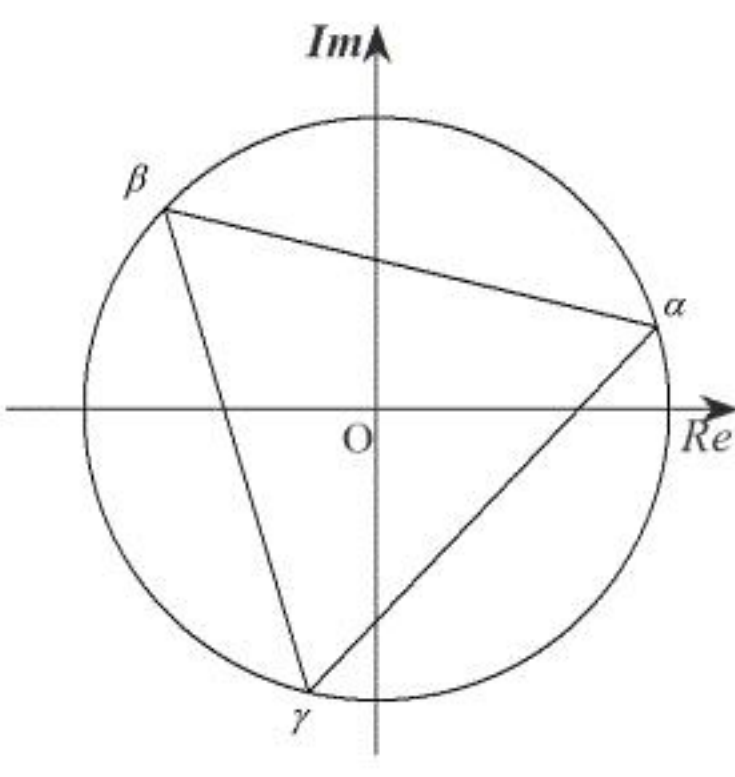
$$P(D) = \frac{1 - \frac{1}{612}}{2} = \frac{611}{1224}$$

が得られる。

(2)
条件より

$$|\alpha| = \sqrt{\left(\sqrt{23}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 5$$

であるから、 α, β, γ を頂点とする三角形は半径5の円に内接する正三角形である。ここで、点 α を原点中心に $\frac{2}{3}\pi$ 回転させると点 β に、点 β を原点中心に $\frac{2}{3}\pi$ 回転させると点 γ に一致するとして一般性を失わない。以下の図に α, β, γ の位置関係を示す。



よって、 ω を

$$\omega = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

と定めると

$$\begin{cases} \beta = \omega\alpha \\ \gamma = \omega^2\alpha \end{cases}$$

が得られる。ここで、ド・モアブルの定理より、

$$\omega^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

であるから、

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) &= 0 \\ \therefore \omega^2 + \omega + 1 &= 0 \quad (\because \omega \neq 1) \end{aligned}$$

である。以上より

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta + \gamma| &= |\alpha + \omega\alpha + \omega^2\alpha| \\ &= |\alpha| |1 + \omega + \omega^2| \\ &= 0 \\ |\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha| &= |\alpha \cdot \omega\alpha + \omega\alpha \cdot \omega^2\alpha + \omega^2\alpha \cdot \alpha| \\ &= |\alpha^2| |1 + \omega + \omega^2| \\ &= 0 \\ |\alpha\beta\gamma| &= |\alpha \cdot \omega\alpha \cdot \omega^2\alpha| \\ &= |\alpha^3| \\ &= |\alpha|^3 \\ &= 125 \end{aligned}$$

となる。次に、 α, β, γ を実軸方向に -1 、虚軸方向に 1 だけ平行移動させたのがそれぞれ

α', β', γ' であるので

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha - 1 + i \\ \beta' = \beta - 1 + i \\ \gamma' = \gamma - 1 + i \end{cases}$$

である。よって

$$\begin{aligned} |\alpha' + \beta' + \gamma'| &= |\alpha - 1 + i + \beta - 1 + i + \gamma - 1 + i| \\ &= |\alpha + \beta + \gamma - 3 + 3i| \\ &= |\alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 - 3 + 3i| \\ &= |\alpha(1 + \omega + \omega^2) - 3 + 3i| \\ &= |-3 + 3i| \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 3^2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{cases} \alpha'\beta' = (\alpha - 1 + i)(\beta - 1 + i) = \alpha\beta + (-1 + i)(\alpha + \beta) + (-1 + i)^2 \\ \beta'\gamma' = (\beta - 1 + i)(\gamma - 1 + i) = \beta\gamma + (-1 + i)(\beta + \gamma) + (-1 + i)^2 \\ \gamma'\alpha' = (\gamma - 1 + i)(\alpha - 1 + i) = \gamma\alpha + (-1 + i)(\gamma + \alpha) + (-1 + i)^2 \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} |\alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha'| &= |\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 2(-1 + i)(\alpha + \beta + \gamma) + 3(-1 + i)^2| \\ &= |\alpha^2(1 + \omega + \omega^2) + 2\alpha(-1 + i)(1 + \omega + \omega^2) + 3(-1 + i)^2| \\ &= |3(-1 + i)^2| \\ &= 3|-2i| \\ &= 6 \end{aligned}$$

が得られる。

【Ⅱ】

(1)

点Dにおける楕円Cの接線の方程式は

$$\begin{aligned}\frac{k^2}{2} \cdot \frac{1}{k}x + \frac{1}{2k^2} \cdot ky &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{k}{2}x + \frac{1}{2k}y &= 1 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。①に $y=0$ を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{k} \quad (\because k > 1)\end{aligned}$$

となるから、 $E\left(\frac{2}{k}, 0\right)$ である。また①に $x=0$ を代入すると

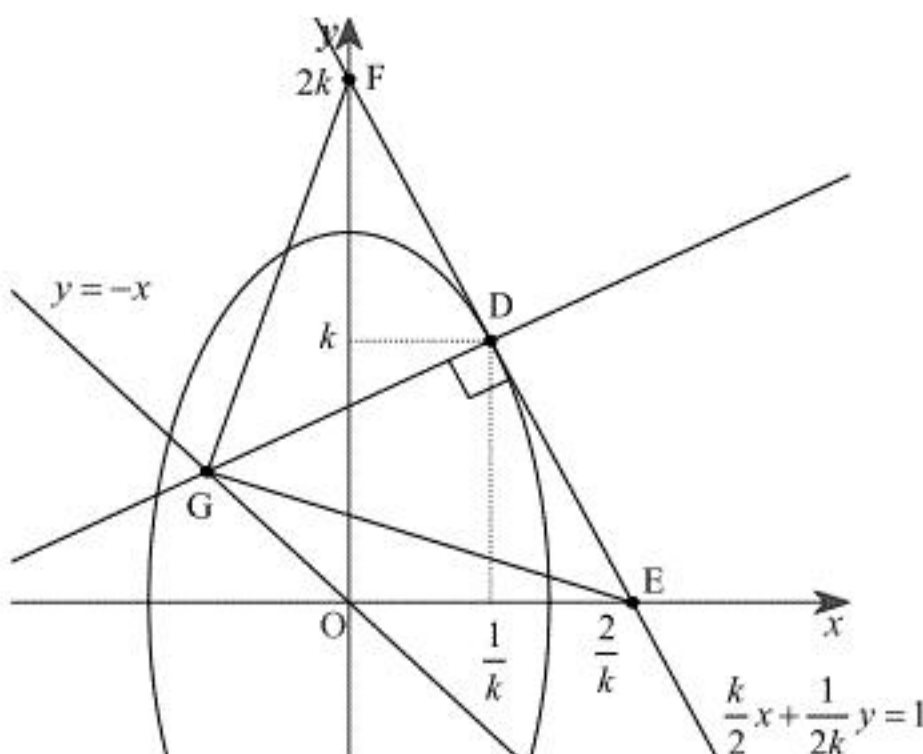
$$\begin{aligned}\frac{1}{2k}y &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= 2k\end{aligned}$$

となるから、 $F(0, 2k)$ となる。

$$\text{(答)} \quad E\left(\frac{2}{k}, 0\right), F(0, 2k)$$

(2)

以下に楕円Cおよび点Dにおける接線と法線、点E, F, Gを図示する。



(1)より、点Dにおける接線の傾きは

$$-\frac{k}{2} \cdot 2k = -k^2$$

となるから、法線の傾きは $\frac{1}{k^2}$ である。よって法線の方程式は

$$\begin{aligned}y - k &= \frac{1}{k^2} \left(x - \frac{1}{k} \right) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{k^2}x + k - \frac{1}{k^3}\end{aligned}$$

となる。これと $y = -x$ の交点の座標を求めると

$$\begin{aligned}-x &= \frac{1}{k^2}x + k - \frac{1}{k^3} \\ \Leftrightarrow \frac{k^2+1}{k^2}x &= \frac{1-k^4}{k^3} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{(1-k^2)(1+k^2)}{k^3} \cdot \frac{k^2}{k^2+1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1-k^2}{k} \\ \therefore y &= \frac{k^2-1}{k}\end{aligned}$$

となるから、 $G\left(\frac{1-k^2}{k}, \frac{k^2-1}{k}\right)$ となる。ここで $\overline{GE}$, $\overline{GF}$ を考えると

$$\begin{aligned}\overline{GE} &= \left(\frac{2}{k} - \frac{1-k^2}{k}, 0 - \frac{k^2-1}{k} \right) \\ &= \left(\frac{k^2+1}{k}, \frac{1-k^2}{k} \right) \\ \overline{GF} &= \left(0 - \frac{1-k^2}{k}, 2k - \frac{k^2-1}{k} \right) \\ &= \left(\frac{k^2-1}{k}, \frac{k^2+1}{k} \right)\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\overline{GE} \cdot \overline{GF} &= \frac{(k^2+1)(k^2-1)}{k^2} + \frac{(1-k^2)(k^2+1)}{k^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

が得られる。ここで $|\overline{GE}| \neq 0$, $|\overline{GF}| \neq 0$ であるから、 $\angle EGF = \frac{\pi}{2}$ と求められる。

$$\text{(答)} \quad G\left(\frac{1-k^2}{k}, \frac{k^2-1}{k}\right), \angle EGF = \frac{\pi}{2}$$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} |\overline{GE}| |\overline{GF}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k^2+1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1-k^2}{k}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{k^2-1}{k}\right)^2 + \left(\frac{k^2+1}{k}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2k^4+2}{k^2}} \cdot \sqrt{\frac{2k^4+2}{k^2}} \\ &= \frac{k^4+1}{k^2} \\ T &= \frac{1}{2} \cdot OE \cdot OF \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k} \cdot 2k \\ &= 2\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{2}T \\ \Leftrightarrow \frac{k^4+1}{k^2} &= 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow k^4 - 2\sqrt{2}k^2 + 1 &= 0 \\ \therefore k^2 &= \sqrt{2} + 1 \quad (\because k^2 > 1)\end{aligned}$$

となる。このとき

$$\tan \angle OEF = 2k \cdot \frac{k}{2} = k^2 = \sqrt{2} + 1$$

となる。ここで、倍角の公式より、

$$\begin{aligned}\tan 2\angle OEF &= \frac{2(\sqrt{2}+1)}{1-(\sqrt{2}+1)^2} \\ &= \frac{2(\sqrt{2}+1)}{-2(\sqrt{2}+1)} \\ &= -1\end{aligned}$$

であり、図より $0 < \angle OEF < \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned}2\angle OEF &= \frac{3}{4}\pi \\ \therefore \angle OEF &= \frac{3}{8}\pi\end{aligned}$$

と求められる。

$$\text{(答)} \quad k^2 = \sqrt{2} + 1, \angle OEF = \frac{3}{8}\pi$$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned}(n+3)a_{n+1}-(n+1)a_n &= 2(n+1) \text{ に } n=1 \text{ を代入して,} \\ 4a_2-2a_1 &= 2\cdot 2 \\ \Leftrightarrow a_2 &= \frac{4+2a_1}{4} \\ \therefore a_2 &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

と求まる。また、 $\sum_{k=1}^n kb_k=a_n\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)$ に $n=2$ を代入して、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^2 kb_k &= a_2\left(\sum_{k=1}^2 b_k\right) \\ \Leftrightarrow b_1+2b_2 &= a_2(b_1+b_2) \\ \Leftrightarrow 1+2b_2 &= \frac{3}{2}(1+b_2) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}b_2 &= \frac{1}{2} \\ \therefore b_2 &= 1\end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答) } a_2=\frac{3}{2}, b_2=1$$

(2)

$$\begin{aligned}(n+3)a_{n+1}-(n+1)a_n &= 2(n+1) \text{ の両辺に } n+2 \text{ を乗じて,} \\ (n+3)(n+2)a_{n+1}-(n+2)(n+1)a_n &= 2(n+2)(n+1) \\ \therefore c_{n+1}-c_n &= 2(n+2)(n+1)\end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答) } c_{n+1}-c_n=2(n+2)(n+1)$$

(3)

まず、 $c_1=3\cdot 2\cdot 1=6$ である。ここで(2)の結果から $n\geq 2$ において、

$$\begin{aligned}c_n &= c_1+\sum_{k=1}^{n-1}2(k+2)(k+1) \\ &= c_1+2\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^2+3\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}2\right) \\ &= c_1+2\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{3}{2}(n-1)n+2(n-1)\right\} \\ &= \frac{2}{3}n^3+2n^2+\frac{4}{3}n+2\end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ でも成立しているから、

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{2}{3}n^3+2n^2+\frac{4}{3}n+2 \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{\frac{2}{3}n^3+2n^2+\frac{4}{3}n+2}{(n+2)(n+1)} \\ \therefore a_n &= \frac{2n^3+6n^2+4n+6}{3(n+2)(n+1)}\end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答) } a_n=\frac{2n^3+6n^2+4n+6}{3(n+2)(n+1)}$$

(4)

$n\geq 2$ のとき、与えられた等式より、

$$\begin{aligned}a_n\left(\sum_{k=1}^nb_k\right)-a_{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}b_k\right) &= a_nb_n+(a_n-a_{n-1})s_{n-1} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^nkb_k-\sum_{k=1}^{n-1}kb_k &= a_nb_n+(a_n-a_{n-1})s_{n-1} \\ \Leftrightarrow nb_n &= a_nb_n+(a_n-a_{n-1})s_{n-1} \\ \Leftrightarrow (n-a_n)b_n &= (a_n-a_{n-1})s_{n-1}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}a_n-n &= \frac{2}{3}n+\frac{2}{(n+2)(n+1)}-n \\ &= -\frac{1}{3}n+\frac{2}{(n+2)(n+1)}\end{aligned}$$

である。ここで $n\geq 2$ で

$$-\frac{1}{3}n\leq -\frac{2}{3} \text{ かつ } 0\leq \frac{2}{(n+2)(n+1)}\leq \frac{1}{6}$$

より、 $a_n-n<0$ すなわち $a_n-n\neq 0$ である。よって、

$$\begin{aligned}(n-a_n)b_n &= (a_n-a_{n-1})s_{n-1} \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{a_n-a_{n-1}}{n-a_n}s_{n-1}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}(n+2)a_n-na_{n-1} &= 2n \\ \Leftrightarrow n(a_n-a_{n-1})+2a_n &= 2n \\ \Leftrightarrow a_n-a_{n-1} &= 2\cdot \frac{n-a_n}{n}\end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}d_n &= \frac{a_n-a_{n-1}}{n-a_n} \\ \Leftrightarrow d_n &= \frac{2\cdot \frac{n-a_n}{n}}{n-a_n} \\ \therefore d_n &= \frac{2}{n}\end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答) } d_n=\frac{2}{n}$$

(5)

$n\geq 2$ のとき、(4)より、

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}b_k \\ \Leftrightarrow nb_n &= 2\sum_{k=1}^{n-1}b_k\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}(n+1)b_{n+1}-nb_n &= 2\sum_{k=1}^nb_k-2\sum_{k=1}^{n-1}b_k \\ \Leftrightarrow (n+1)b_{n+1}-nb_n &= 2b_n \\ \Leftrightarrow (n+1)b_{n+1} &= (n+2)b_n \\ \Leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{n+2} &= \frac{b_n}{n+1}\end{aligned}$$

が成立する。よって、 $\frac{b_n}{n+1}=\frac{1}{3}$ から

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{n+1} &= \frac{1}{3} \\ \therefore b_n &= \frac{n+1}{3}\end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答) } b_n=\frac{n+1}{3}$$

【Ⅳ】

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x \cos x + 4\sin x + 4x \cos x - 4\sin x \\ &= 2\cos x(\sin x + 2x) \end{aligned}$$

となる。ここで $0 < x \leq \pi$ に対して、

$$\sin x + 2x > 0 + 0 = 0$$

となり、 $x > \pi$ に対して、

$$\sin x + 2x > -1 + 2\pi > 0$$

となるから、合わせて $x > 0$ の範囲で $\sin x + 2x > 0$ である。よって $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$2n\pi - 2\pi$	$\cdots$	$2n\pi - \frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$2n\pi - \frac{1}{2}\pi$	$\cdots$	$2n\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

極大値は

$$\begin{aligned} f\left(2n\pi - \frac{3}{2}\pi\right) &= 1^2 + 4 \cdot \left(2n\pi - \frac{3}{2}\pi\right) \cdot 1 + 4 \cdot 0 \\ &= 1 + 2(4n - 3)\pi \end{aligned}$$

となり、極小値は

$$\begin{aligned} f\left(2n\pi - \frac{1}{2}\pi\right) &= (-1)^2 + 4 \cdot \left(2n\pi - \frac{1}{2}\pi\right) \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \\ &= 1 - 2(4n - 1)\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) 極大値: $1 + 2(4n - 3)\pi$, 極小値: $1 - 2(4n - 1)\pi$

(2)

以下では C を積分定数とする。

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \\ \int 4x \sin x dx &= \int 4x(-\cos x)' dx \\ &= 4x(-\cos x) - \int (4x)'(-\cos x) dx \\ &= -4x \cos x + 4 \int \cos x dx \\ &= -4x \cos x + 4 \sin x + C \\ \int 4 \cos x dx &= 4 \sin x + C \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - 4x \cos x + 4 \sin x + 4 \sin x + C \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - 4x \cos x + 8 \sin x + C \end{aligned}$$

となる。

(答) $\int f(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - 4x \cos x + 8 \sin x + C$ (C は積分定数)

(3)

$g(x) = x - \sin x$ とする。このとき $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ であるから、 $g(x)$ は単調増加する。よ

って、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ の範囲で

$$\begin{aligned} g(x) &\geq g(0) = 0 \\ \Leftrightarrow x - \sin x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sin x &\leq x \end{aligned}$$

となる。次に $h(x) = \sin x - \frac{3}{\pi}x$ とする。このとき $h'(x) = \cos x - \frac{3}{\pi}$ となる。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ の範囲

で $\cos x$ は 1 から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ へ単調減少する。さらに

$$\begin{aligned} 3 < \pi &\Leftrightarrow \frac{3}{\pi} < 1 \\ \pi^2 < (3.2)^2 \\ \Rightarrow \pi^2 &< 12 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} &< \frac{9}{\pi^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &< \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

より $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{3}{\pi} < 1$ であるから、 $g'(\alpha) = 0$ となる $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$ がただ1つ存在する。 $h(x)$ の増減

表を書くと、次のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

これより、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ の範囲で、

$$\begin{aligned} h(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sin x - \frac{3}{\pi}x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{\pi}x &\leq \sin x \end{aligned}$$

となる。以上より、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ のとき $\frac{3}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(4)

$2n\pi - \frac{1}{2}\pi < 2n\pi - \frac{1}{n\pi}$ であるから、(1)の増減表より開区間 $\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}, 2n\pi\right)$ において $f'(x) > 0$

より $f(x)$ は狭義単調増加する。また、

$$\begin{aligned} f\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) &= \sin^2\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) + 4\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right)\sin\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) + 4\cos\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) \\ &= \sin^2 \frac{1}{n\pi} - 4\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right)\sin \frac{1}{n\pi} + 4\cos \frac{1}{n\pi} \\ &< 1 - 4\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right)\frac{3}{\pi} \cdot \frac{1}{n\pi} + 4\left(\because 0 < \frac{1}{n\pi} < \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 5 - 4\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) \cdot \frac{3}{\pi} \cdot \frac{1}{n\pi} \\ &= \frac{5n^2\pi^3 - 24n^2\pi^2 + 12}{n^2\pi^3} \\ &< \frac{(5 \cdot 3.2^3 - 24 \cdot 3.1^2)n^2 + 12}{n^2\pi^3} \\ &= \frac{12 - 66.8n^2}{n^2\pi^3} \\ &\leq \frac{12 - 66.8}{n^2\pi^3} \\ &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2n\pi) &= \sin^2(2n\pi) + 4 \cdot 2n\pi \sin(2n\pi) + 4\cos(2n\pi) \\ &= 4 \\ &> 0 \end{aligned}$$

である。以上より、中間値の定理 $f'(x) > 0$ であることから $f(x) = 0$ は開区間

$\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}, 2n\pi\right)$ においてただ1つの実数解をもつ。

(証明終)

(5)

$$\int_{p_n}^{p_{n+1}} f(x) dx = \int_{p_n}^{2n\pi} f(x) dx + \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x) dx - \int_{p_{n+1}}^{2(n+1)\pi} f(x) dx$$

である。ここで(2)で求めた不定積分より

$$\begin{aligned} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x) dx &= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - 4x \cos x + 8 \sin x \right]_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \\ &= \pi - 8\pi \\ &= -7\pi \end{aligned}$$

となる。また、 $p_n \leq x \leq 2n\pi$ において $f(x)$ は単調増加であるから、

$$0 = f(p_n) \leq f(x) \leq f(2n\pi) = 4$$

となる。よって、 $2n\pi - \frac{1}{n\pi} < p_n < 2n\pi$ であるから

$$0 \leq \int_{p_n}^{2n\pi} f(x) dx \leq \int_{p_n}^{2n\pi} 4 dx = 4(2n\pi - p_n) < 4 \left\{ 2n\pi - \left(2n\pi - \frac{1}{n\pi} \right) \right\} = \frac{4}{n\pi}$$

となる。同様に、 $0 \leq \int_{p_{n+1}}^{2(n+1)\pi} f(x) dx < \frac{4}{(n+1)\pi}$ となる。よって、

$$\begin{aligned} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x) dx - \int_{p_{n+1}}^{2(n+1)\pi} f(x) dx &\leq \int_{p_n}^{p_{n+1}} f(x) dx \leq \int_{p_n}^{2n\pi} f(x) dx + \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x) dx \\ \Rightarrow -7\pi - \frac{4}{(n+1)\pi} &< \int_{p_n}^{p_{n+1}} f(x) dx < -7\pi + \frac{4}{n\pi} \end{aligned}$$

となる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-7\pi - \frac{4}{(n+1)\pi} \right) = -7\pi$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-7\pi + \frac{4}{n\pi} \right) = -7\pi$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{p_n}^{p_{n+1}} f(x) dx = -7\pi$$

となる。

(答) -7π