

【Ⅰ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	
	−3	7	−1	
(2)	エ	オ	カ	
	16	248	3904	
(3)	キ	ク	ケ	コ
	45°	$\sqrt{10}$	$\sqrt{5}$	7

【解説】

(1)

実数係数の3次方程式 $x^3+ax^2+3x+b=0$ の1つの解が $x=2+\sqrt{3}i$ であるとき、共役複素数である $x=2-\sqrt{3}i$ もこの方程式の解となる。したがって、残り1つの解を k とすると、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} (2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)+k=-a \\ k(2+\sqrt{3}i)+k(2-\sqrt{3}i)+(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=3 \\ k(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=-b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+k=-a \\ 4k+7=3 \\ 7k=-b \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} k=-1 \\ a=-3 \\ b=7 \end{cases}$$

が得られる。

(2)

$a=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ のとき、

$$\begin{aligned} a+\frac{2}{a} &= \sqrt{5}-\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

であるから、

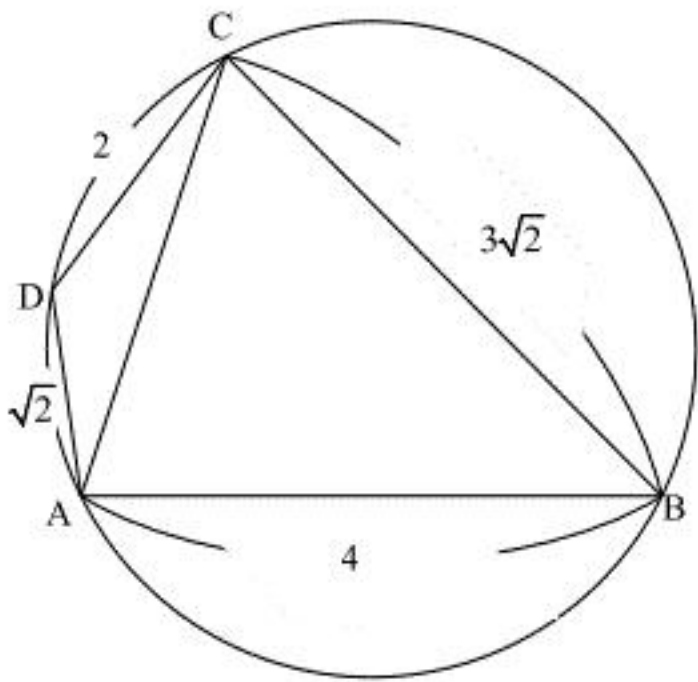
$$\begin{aligned} A &= a^2+\frac{2^2}{a^2} \\ &= \left(a+\frac{2}{a}\right)^2-4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= a^4+\frac{2^4}{a^4} \\ &= \left(a^2+\frac{2^2}{a^2}\right)^2-8 \\ &= A^2-8 \\ &= 248 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= a^6+\frac{2^6}{a^6} \\ &= \left(a^4+\frac{2^4}{a^4}\right)\left(a^2+\frac{2^2}{a^2}\right)-2^2\left(a^2+\frac{2^2}{a^2}\right) \\ &= AB-4A \\ &= A(B-4) \\ &= 16\cdot 244 \\ &= 3904 \end{aligned}$$

と求まる。

(3)



$\triangle ABC$ について余弦定理より、

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot \cos\angle ABC \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。同様に $\triangle CDA$ について余弦定理より、

$$AC^2=AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot \cos\angle ADC \qquad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。ここで、円に内接する四角形の性質より、

$$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC$$

であるから、

$$\cos\angle ADC=-\cos\angle ABC$$

が成り立つ。したがって、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot \cos\angle ABC &= AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot \cos\angle ADC \\ \Leftrightarrow 16+18-2\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}\cdot \cos\angle ABC &= 2+4-2\cdot \sqrt{2}\cdot 2\cdot (-\cos\angle ABC) \\ \Leftrightarrow 28\sqrt{2}\cos\angle ABC &= 28 \\ \therefore \cos\angle ABC &= \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

であり、 $0^\circ<\angle ABC<180^\circ$ より、 $\angle ABC=45^\circ$ となる。また、 $\textcircled{1}$ に $\textcircled{3}$ を代入することで、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 16+18-24\sqrt{2}\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow AC^2 &= 10 \\ \therefore AC &= \sqrt{10} \ (\because AC>0) \end{aligned}$$

を得る。さらに、 $\triangle ABC$ について正弦定理より、円 I の半径を R とすると、

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin B} &= 2R \\ \Leftrightarrow R &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

である。最後に、 $\triangle ABC$ の面積を S_1 、 $\triangle ADC$ の面積を S_2 、四角形 $ABCD$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= S_1+S_2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}\cdot \sin 45^\circ+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \sqrt{2}\cdot \sin 135^\circ \\ &= 7 \end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 2} = 2 - \frac{3}{a_n + 2}$ より, $a_n > 1$ ならば $a_{n+1} > 1$ が成り立つから, すべての自然数 n

について帰納的に $a_n > 1$ が成り立つ。よって,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2a_n + 1}{a_n + 2} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 1 &= \frac{2a_n + 1}{a_n + 2} - 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 1 &= \frac{a_n - 1}{a_n + 2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1} - 1} &= \frac{a_n + 2}{a_n - 1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1} - 1} &= \frac{3}{a_n - 1} + 1 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= 3b_n + 1 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + \frac{1}{2} &= 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

である。ここで, $b_1 = \frac{1}{a_1 - 1} = 1$ より, 数列 $\{b_n\}$ の一般項は,

$$\begin{aligned} b_n + \frac{1}{2} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 3^{n-1} \\ \therefore b_n &= \frac{3^n - 1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad b_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

(2)

(1)の結果より, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n - 1} &= \frac{3^n - 1}{2} \\ \therefore a_n &= \frac{2}{3^n - 1} + 1 = \frac{3^n + 1}{3^n - 1} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad a_n = \frac{3^n + 1}{3^n - 1}$$

(3)

(2)の結果より,

$$\begin{aligned} \frac{a_n + 1}{a_n - 1} &= 1 + \frac{2}{a_n - 1} \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{3^n - 1}{2} \\ &= 3^n \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} c_n &> 10^{20} \\ \Leftrightarrow 3^{2n} &> 10^{20} \\ \Leftrightarrow \log_{10} 3^{2n} &> \log_{10} 10^{20} \quad (\because 10 > 1) \\ \Leftrightarrow 2n \log_{10} 3 &> 20 \\ \Leftrightarrow n &> \frac{10}{\log_{10} 3} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで,

$$\begin{aligned} 0.477 &< \log_{10} 3 < 0.478 \\ \Leftrightarrow \frac{10}{0.478} &< \frac{10}{\log_{10} 3} < \frac{10}{0.477} \\ \therefore 20.92 &< \frac{10}{\log_{10} 3} < 20.97 \end{aligned}$$

が成立するから, 条件を満たす最小の自然数 n は 21 である。

$$\text{(答)} \quad n = 21$$

〔Ⅲ〕

(1)

$$f(x) = -x^2 + ax + b \quad \dots \textcircled{1}$$

とおく。 $y = f(x)$ が 2 点 $A(0, p)$, $B(p, 0)$ を通るから、それぞれ①に代入して

$$\begin{aligned} p &= b \\ 0 &= -p^2 + ap + b \end{aligned}$$

となる。よって、 $p > 0$ より、 $a = p - 1$, $b = p$ と計算できるから、①に代入して

$$f(x) = -x^2 + (p-1)x + p$$

と求められる。また、

$$f'(x) = -2x + p - 1$$

より、 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ \Leftrightarrow y &= (p-1)x + p \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となり、 m の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(p)(x-p) + f(p) \\ \Leftrightarrow y &= -(p+1)x + p^2 + p \end{aligned}$$

と求められる。

$$f(x) = -x^2 + (p-1)x + p$$

$$(\text{答}) \quad \ell \text{ の方程式: } y = (p-1)x + p$$

$$m \text{ の方程式: } y = -(p+1)x + p^2 + p$$

(2)

$$g(x) = x^2 + cx + d \quad \dots \textcircled{3}$$

とおく。 $y = g(x)$ が点 B を通るから、③に代入して

$$0 = p^2 + cp + d \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。また、 $g'(x) = 2x + c$ であり、点 B での接線が m と一致することより、傾きについて

$$\begin{aligned} g'(p) &= -(p+1) \\ \Leftrightarrow 2p + c &= -(p+1) \\ \therefore c &= -(3p+1) \end{aligned}$$

となるから、④に代入すると

$$\begin{aligned} d &= -p^2 + (3p+1)p \\ &= 2p^2 + p \end{aligned}$$

となる。以上より、 c, d をそれぞれ③に代入すると

$$g(x) = x^2 - (3p+1)x + 2p^2 + p \quad \dots \textcircled{5}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad g(x) = x^2 - (3p+1)x + 2p^2 + p$$

(3)

②と⑤より y を消去して、 ℓ と $y = g(x)$ の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} (p-1)x + p &= x^2 - (3p+1)x + 2p^2 + p \\ \Leftrightarrow x^2 - 4px + 2p^2 &= 0 \\ \therefore x &= (2 \pm \sqrt{2})p \end{aligned}$$

となる。点 C は ℓ と $y = g(x)$ の共有点のうち x 座標の値が小さい方の点であるから、 $p > 0$

に注意して、 C の x 座標は $(2 - \sqrt{2})p$ であり、②に代入して y 座標は

$$(p-1)(2 - \sqrt{2})p + p = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2}p^2 + p)$$

となる。よって、 $\triangle OAC : \triangle OBC$ は

$$\begin{aligned} \triangle OAC : \triangle OBC &= \frac{1}{2}p(2 - \sqrt{2})p : \frac{1}{2}p(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2}p^2 + p) \\ &= \sqrt{2} : \sqrt{2}p + 1 \end{aligned}$$

であり、これが $1 : \sqrt{2}$ に等しい。よって、 $1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : \sqrt{2}p + 1$ より

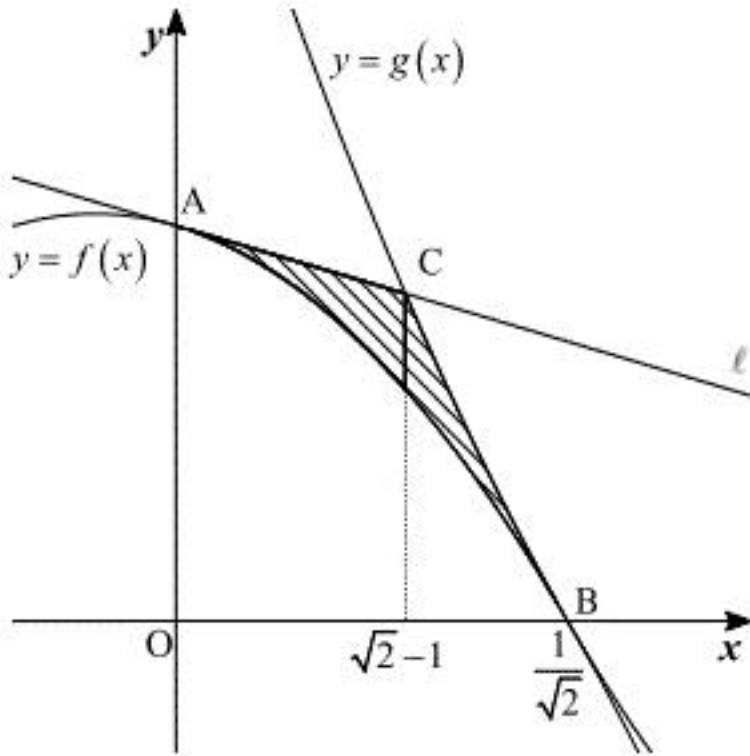
$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{2}p + 1 \\ \therefore p &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(4)

求める面積は以下の斜線部である。



C の x 座標は $(2 - \sqrt{2})p = \sqrt{2} - 1$ であるから、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{2}-1} \left[\{(p-1)x + p\} - \{-x^2 + (p-1)x + p\} \right] dx \\ &\quad + \int_{\sqrt{2}-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\{x^2 - (3p+1)x + 2p^2 + p\} - \{-x^2 + (p-1)x + p\} \right] dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}-1} x^2 dx + \int_{\sqrt{2}-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (2x^2 - 4px + 2p^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}-1} + \left[\frac{2}{3}x^3 - 2px^2 + 2p^2x \right]_{\sqrt{2}-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{2}-7}{3} + \frac{28-19\sqrt{2}}{6} + (5-4\sqrt{2})p + (2-\sqrt{2})p^2 \\ &= \frac{5\sqrt{2}-7}{3} + \frac{28-19\sqrt{2}}{6} + (5-4\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (2-\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$