

2021年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)のそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 氏名の記入欄は、解答用紙(一)、(二)の表面にそれぞれ1か所ある。合計2か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (4) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (5) 問題紙の本文は2ページである。
- (6) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (7) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (8) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (9) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ.

- (1) 1 から 9 までの番号のついた札が、袋 α にはそれぞれ 1 枚ずつ合計 9 枚、袋 β にはそれぞれ 2 枚ずつ合計 18 枚入っている. 袋 α から札を 1 枚ずつ 3 回続けて取り出し、取り出した順に左から右に並べて 3 桁の整数 m をつくる. 次に、袋 β から札を 1 枚ずつ 3 回続けて取り出し、取り出した順に左から右に並べて 3 桁の整数 n をつくる. ただし、どちらにおいても取り出した札は袋に戻さない. m が奇数である事象を A とする. m が 3 の倍数である事象を B とする. このとき、確率 $P(A) = \text{ア}$, $P(B) = \text{イ}$ であり、条件付き確率 $P_A(B) = \text{ウ}$ である. $n > 550$ である事象を C とする. $m > n$ である事象を D とする. このとき、確率 $P(C) = \text{エ}$, $P(D) = \text{オ}$ である.

- (2) i を虚数単位, $\alpha = \sqrt{23} + \sqrt{2}i$ とする. 複素数平面上で、原点を中心とする円に内接する正三角形の 1 つの頂点が点 α であるとき、残りの頂点を表す複素数を β, γ とする. このとき、 $|\alpha + \beta + \gamma|$, $|\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha|$, $|\alpha\beta\gamma|$ の値はそれぞれ カ キ ク である. 次に、この 3 点 α, β, γ を実軸方向に -1 、虚軸方向に 1 だけ平行移動した点をそれぞれ α', β', γ' とする. このとき、 $|\alpha' + \beta' + \gamma'|$, $|\alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha'|$ の値はそれぞれ ケ コ である.

〔 II 〕 定数 k は $k > 1$ とする. O を原点とする座標平面上の楕円 C :

$$\frac{k^2}{2}x^2 + \frac{1}{2k^2}y^2 = 1 \text{ と } C \text{ 上の点 } D \left(\frac{1}{k}, k \right) \text{ を考える. 次の問いに答えよ.}$$

- (1) 点 D における楕円 C の接線が、 x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ E, F とする. E, F の座標を k で表せ.
- (2) 点 D における楕円 C の法線が、直線 $y = -x$ と交わる点を G とする. G の座標を k で表せ. さらに、 $\angle EGF$ の大きさを求めよ.
- (3) $\triangle GEF$ の面積を S , $\triangle OEF$ の面積を T とする. $S = \sqrt{2}T$ のとき、 k^2 の値を求めよ. さらに、このとき、 $\angle OEF$ の大きさを求めよ.

〔Ⅲ〕 n を自然数とし、次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を考える.

$$a_1 = 1, \quad (n+3)a_{n+1} - (n+1)a_n = 2(n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_1 = 1, \quad \sum_{k=1}^n k b_k = a_n \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

次の問いに答えよ.

(1) a_2, b_2 を求めよ.

(2) $c_n = (n+2)(n+1)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく. $c_{n+1} - c_n$ を n で表せ.

(3) $n \geq 1$ とする. このとき, a_n を n で表せ.

(4) $n \geq 2$ とする. このとき, $s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ とし, $b_n = d_n s_{n-1}$ を満たす d_n を考える. このとき, d_n を n で表せ. ただし, 必要ならば, 次の等式が成り立つことを証明なしで用いてよい.

$$a_n \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) - a_{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k \right) = a_n b_n + (a_n - a_{n-1}) s_{n-1}$$

(5) $n \geq 2$ とする. このとき, b_n を n で表せ.

〔Ⅳ〕 n を自然数とする. 関数 $f(x) = \sin^2 x + 4x \sin x + 4 \cos x$ を考える. 次の問いに答えよ. ただし, 必要ならば, $3.1 < \pi < 3.2$ であることを用いてよい.

(1) 开区間 $(2n\pi - 2\pi, 2n\pi)$ において, 関数 $f(x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ.

(2) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ.

(3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ のとき, $\frac{3}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ が成り立つことを示せ.

(4) 开区間 $\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}, 2n\pi\right)$ において, 方程式 $f(x) = 0$ はただ1つの実数解をもつことを示せ.

(5) 各自然数 n に対し, (4) で定めた実数解を p_n とおく. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{p_n}^{p_{n+1}} f(x) dx \text{ を求めよ.}$$

以下余白

