

【I】

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$

〔解説〕

(1)

p_1 は、1 回目の試行で表を出し、かつ 2, 4 のいずれかのカードを引く確率であるから、

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。 p_2 について、2 回の試行で獲得した点数の合計が 2 以上の偶数になる場合、2 回とも裏であることはあり得ない。よって、硬貨の表裏の出方について、次の 2 つに場合分けできる。

[1] 1 回目、2 回目のいずれか 1 回で裏を出すとき

1 回目、2 回目のいずれか 1 回で裏を出す確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

である。この条件下において、点数の合計が 2 以上の偶数になるためには、裏が出ていない回で 2 以上の偶数の点を出すことが必要十分であり、その確率は

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

となる。よって、1 回目、2 回目のいずれか 1 回で裏を出し、かつ 2 回の試行で獲得した点数の合計が 2 以上の偶数になる確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。

[2] 1 回目、2 回目の両方で表を出すとき

1 回目、2 回目の両方で表を出す確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。この条件下において、獲得した点数の合計は必ず 2 以上になる。これが偶数であるためには 1 回目、2 回目ともに偶数、またはともに奇数であることが必要十分であり、その確率は

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

となる。よって、1 回目、2 回目の両方で表を出し、かつ 2 回の試行で獲得した点数の合計が 2 以上の偶数になる確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

である。

以上 [1], [2] より、

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

である。次に、 $n+1$ 回の試行で獲得した点数の合計が 2 以上の偶数になるとき、1 回目の試行の結果によって次の 3 つに場合分けできる。

[1] 1 回目に裏が出るとき

1 回目に裏が出る確率は $\frac{1}{2}$ である。この条件下で残りの n 回で獲得する点数の合計が 2 以上の偶数になることが必要十分であり、その確率は p_n である。

[2] 1 回目に表が出て、かつ 1 か 3 のカードを引くとき

1 回目に表が出て、かつ 1 か 3 のカードを引く確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。残りの n 回で獲得する点数の合計が奇数となることが必要十分であり、これは「 n 回ともすべて獲得する点数が 0 である」または「残りの n 回の点数の合計が 2 以上の偶数である」事象の余事象である。「 n 回ともすべて獲得する点数が 0 である」確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ であり、「残りの n 回で獲得する点数の合計が 2 以上の偶数である」確率は p_n である。

よって、この条件下において題意を満たす確率は $1 - p_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

[3] 1 回目に表が出て、かつ 2 か 4 のカードを引くとき

1 回目に表が出て、かつ 2 か 4 のカードを引く確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。残りの n 回で獲得する点数の合計が偶数となることが必要十分であり、これは「 n 回ともすべて獲得する点数が 0 である」事象と「残りの n 回で獲得する点数の合計が 2 以上の偶数である」事象の和事象である。「 n 回ともすべて獲得する点数が 0 である」確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ であり、「残りの n 回で獲得する点数の合計が 2 以上の偶数である」確率は

p_n である。よって、この条件下において題意を満たす確率は $p_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

以上 [1], [2], [3] より、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{4} \left\{ 1 - p_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} + \frac{1}{4} \left\{ p_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。これを变形すると、 $p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(p_n - \frac{1}{2} \right)$ となる。 $p_1 = \frac{1}{4}$ であるから、

$$p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

となる。

(2)

点 A を原点を中心として $\frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi$ だけ回転した点がそれぞれ点 D, E である。よって、

$$2i \cdot \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) = -\sqrt{3} - i$$

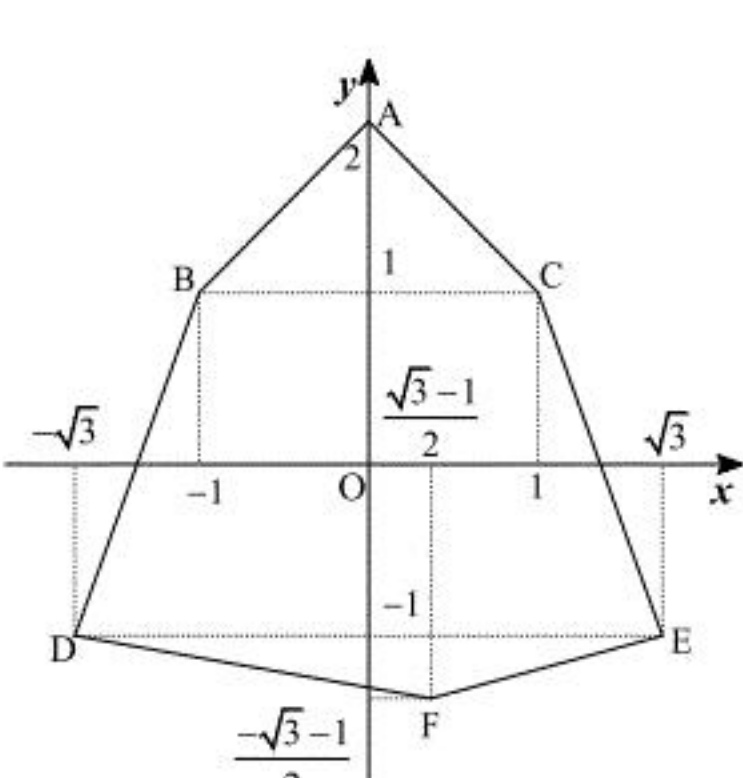
$$2i \cdot \left\{ \cos \left(-\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{2}{3}\pi \right) \right\} = \sqrt{3} - i$$

より、点 D を表す複素数の実部は $-\sqrt{3}$ 、点 E を表す複素数の虚部は -1 である。また、点 F は

点 C を点 B を中心として $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、点 B からの距離を $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 倍した点である。よって、

$$\begin{aligned} &(-1+i) + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \{ (1+i) - (-1+i) \} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \\ &= -1+i + (1+\sqrt{3}) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{-\sqrt{3}-1}{2}i \end{aligned}$$

より、点 F を表す複素数の実部は $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 、虚部は $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$ である。次に、六角形 ABDFEC を複素数平面上に図示すると下図のようになる。



求める面積は(△ABC の面積)+(台形 BDEC の面積)+(△DFE の面積)であるから、

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (2+2\sqrt{3}) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \left(-1 - \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \right) = \frac{9+3\sqrt{3}}{2}$$

である。

【Ⅱ】

(1)

$H: \alpha x^2 - \beta y^2 = 1$ に $(x, y) = (f(t), g(t))$ を代入して、 $t^2 \neq 5$ の下で、

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\frac{t^2 - 4t + 5}{t^2 - 5} \right)^2 - \beta \left(\frac{-2t^2 + 10t - 10}{t^2 - 5} \right)^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{(t^2 - 5)^2} \left\{ \alpha (t^2 - 4t + 5)^2 - 4\beta (-t^2 + 5t - 5)^2 \right\} = 1 \\ & \Leftrightarrow \alpha (t^4 - 8t^3 + 26t^2 - 40t + 25) - 4\beta (t^4 - 10t^3 + 35t^2 - 50t + 25) = t^4 - 10t^2 + 25 \quad (\because t^2 \neq 5) \\ & \Leftrightarrow (\alpha - 4\beta - 1)t^4 - 8(\alpha - 5\beta)t^3 + 2(13\alpha - 70\beta + 5)t^2 - 40(\alpha - 5\beta)t + 25(\alpha - 4\beta - 1) = 0 \end{aligned}$$

を得る。これが $t^2 \neq 5$ を満たすすべての t に対して成立するには、左辺の各項の係数が 0 となる、すなわち

$$\begin{cases} \alpha - 4\beta - 1 = 0 \\ \alpha - 5\beta = 0 \\ 13\alpha - 70\beta + 5 = 0 \end{cases}$$

がすべて成り立つ必要がある。この連立方程式を解くと、 $\alpha = 5, \beta = 1$ である。

(答) $\alpha = 5, \beta = 1$

(2)

$$\begin{aligned} & f(-t) = af(t) + bg(t) \\ & \Leftrightarrow \frac{(-t)^2 - 4 \cdot (-t) + 5}{(-t)^2 - 5} = a \cdot \frac{t^2 - 4t + 5}{t^2 - 5} + b \cdot \frac{-2t^2 + 10t - 10}{t^2 - 5} \\ & \Leftrightarrow t^2 + 4t + 5 = a(t^2 - 4t + 5) + b(-2t^2 + 10t - 10) \quad (\because t^2 \neq 5) \\ & \Leftrightarrow (a - 2b - 1)t^2 - 2(2a - 5b + 2)t + 5(a - 2b - 1) = 0 \end{aligned}$$

より、これが $t^2 \neq 5$ を満たすすべての t に対して成立するとき、

$$\begin{cases} a - 2b - 1 = 0 \\ 2a - 5b + 2 = 0 \end{cases}$$

となる。この連立方程式を解くと、 $a = 9, b = 4$ である。一方、

$$\begin{aligned} & -g(-t) = cf(t) + dg(t) \\ & \Leftrightarrow -\frac{-2 \cdot (-t)^2 + 10 \cdot (-t) - 10}{(-t)^2 - 5} = c \cdot \frac{t^2 - 4t + 5}{t^2 - 5} + d \cdot \frac{-2t^2 + 10t - 10}{t^2 - 5} \\ & \Leftrightarrow 2t^2 + 10t + 10 = c(t^2 - 4t + 5) + d(-2t^2 + 10t - 10) \quad (\because t^2 \neq 5) \\ & \Leftrightarrow (c - 2d - 2)t^2 - 2(2c - 5d + 5)t + 5(c - 2d - 2) = 0 \end{aligned}$$

より、これが $t^2 \neq 5$ を満たすすべての t に対して成立するとき、

$$\begin{cases} c - 2d - 2 = 0 \\ 2c - 5d + 5 = 0 \end{cases}$$

となる。この連立方程式を解くと、 $c = 20, d = 9$ である。

(答) $a = 9, b = 4, c = 20, d = 9$

(3)

(2)より $a = 9, b = 4, c = 20, d = 9$ であるから、

$$\begin{aligned} p' &= 9 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ &= 17 \\ q' &= 20 \cdot 1 + 9 \cdot 2 \\ &= 38 \end{aligned}$$

である。

(答) $p' = 17, q' = 38$

(4)

点 (p, q) は H 上の点であるから、

$$5p^2 - q^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{cases} p' = 9p + 4q \\ q' = 20p + 9q \end{cases}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ を利用して

$$\begin{aligned} 5(p')^2 - (q')^2 &= 5(9p + 4q)^2 - (20p + 9q)^2 \\ &= 5(81p^2 + 72pq + 16q^2) - (400p^2 + 360pq + 81q^2) \\ &= 5p^2 - q^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。 $5(p')^2 - (q')^2 = 1$ が成り立つから、点 (p', q') は H 上の点である。よって、 H 上の任意の点 (p, q) に対して、 (p', q') も H 上にあることが示された。

(証明終)

(5)

$q_n = \sqrt{5r_n^2 - 1}$ とすれば、漸化式 $r_{n+1} = 9r_n + 4\sqrt{5r_n^2 - 1}$ は

$$\begin{cases} r_{n+1} = 9r_n + 4q_n \\ q_n = \sqrt{5r_n^2 - 1} \end{cases}$$

と書ける。ただし、 $r_1 = 1$ である。以下では、数学的帰納法を用いて、任意の正の整数 n で r_n, q_n が正の整数であることを示す。

[1] $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \text{ より} \\ q_1 &= \sqrt{5 - 1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。よって、 $n = 1$ のとき r_1, q_1 は正の整数である。

[2] k を正の整数として $n = k$ のときに r_k, q_k は正の整数であると仮定したとき

仮定より $r_k, q_k = \sqrt{5r_k^2 - 1}$ はともに正の整数である。このもとで、

$$\begin{cases} r_{k+1} = 9r_k + 4q_k \\ q_{k+1} = \sqrt{5r_{k+1}^2 - 1} \end{cases}$$

で定まる r_{k+1}, q_{k+1} が正の整数であることを示す。ここで、 $r_k, q_k = \sqrt{5r_k^2 - 1}$ は

$$5r_k^2 - q_k^2 = 1$$

を満たすから、点 (r_k, q_k) は双曲線 H 上にある。このとき、(4)の議論から、

$$\begin{cases} r_{k+1}' = 9r_k + 4q_k \\ q_{k+1}' = 20r_k + 9q_k \end{cases}$$

で定まる点 (r_{k+1}', q_{k+1}') も双曲線 H 上にある。ここで、 r_k, q_k が正の整数であることから、

r_{k+1}', q_{k+1}' も正の整数である。よって、

$$\begin{aligned} 5(r_{k+1}')^2 - (q_{k+1}')^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow q_{k+1}' &= \sqrt{5(r_{k+1}')^2 - 1} \quad (\because r_{k+1}' \geq 1, q_{k+1}' > 0) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $r_{k+1}' = 9r_k + 4q_k$ より $r_{k+1} = r_{k+1}'$ であり、このとき $q_{k+1}' = \sqrt{5r_{k+1}^2 - 1}$ より

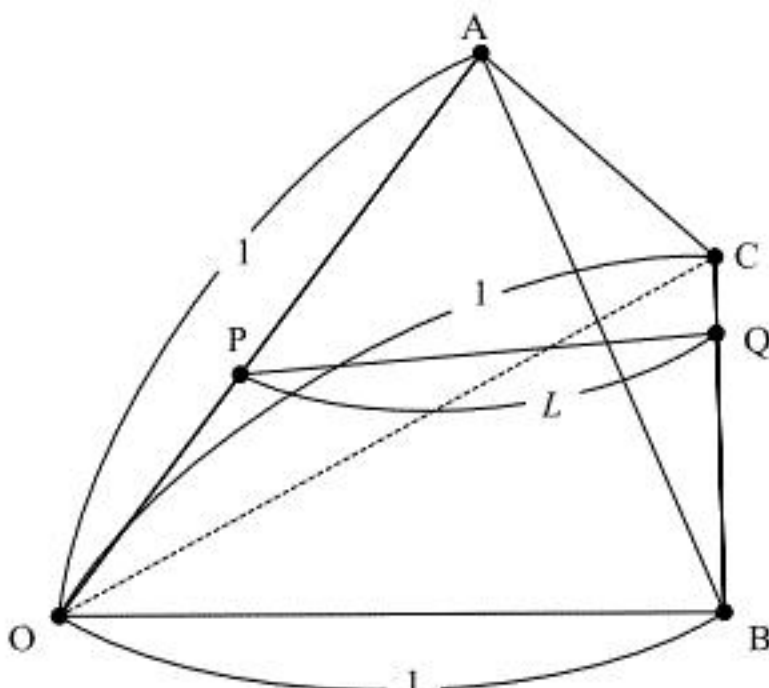
$q_{k+1} = q_{k+1}'$ となる。 r_{k+1}', q_{k+1}' は正の整数であるから、 r_{k+1}, q_{k+1} も正の整数である。

[1], [2]より、数学的帰納法から任意の正の整数 n で r_n, q_n が正の整数である。すなわち、数列 $\{r_n\}$ の各項は正の整数である。

(証明終)

〔Ⅲ〕

(1)



以下では簡単のため $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。条件より、実数 p, q ($0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$) を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= p\vec{a} \\ \overrightarrow{OQ} &= q\vec{b} + (1-q)\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{3}$ より

$$\begin{aligned}L^2 &= |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}|^2 \\ &= |p\vec{a} - q\vec{b} - (1-q)\vec{c}|^2 \\ &= p^2|\vec{a}|^2 + q^2|\vec{b}|^2 + (1-q)^2|\vec{c}|^2 - 2pq\vec{a} \cdot \vec{b} - 2p(1-q)\vec{a} \cdot \vec{c} + 2q(1-q)\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= p^2 + q^2 + (1-q)^2 - \frac{2}{3}pq - \frac{2}{3}p(1-q) + \frac{2}{3}q(1-q) \\ &= p^2 - \frac{2}{3}p + \frac{4}{3}q^2 - \frac{4}{3}q + 1 \\ &= \left(p - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(q - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{9}\end{aligned}$$

となる。 L は正であるから、最小になるのは $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{2}$ のときである。すなわち

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned}& (\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{PQ} \\ &= (\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a}\right) \\ &= -\frac{1}{3}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}x|\vec{b}|^2 + \frac{1}{2}y|\vec{c}|^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}x\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3}x\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}y\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3}y\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}y\right) \\ &= \frac{5}{9}(x+y)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}& \begin{cases} (\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \\ (\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{9}(x+y) = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} + x|\vec{b}|^2 + y\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+\frac{1}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ \frac{2}{3}x = -\frac{1}{3} \end{cases} \\ & \therefore (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(3)

点 Q は辺 BC の中点であるから、対称性より SR の最小値を考えれば十分である。条件より、実数 r, s ($0 \leq r \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$) を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-r)\overrightarrow{OP} + r\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}(1-r)\vec{a} + \frac{1}{2}r\vec{b} + \frac{1}{2}r\vec{c} \\ \overrightarrow{OS} &= s\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{SR}|^2 &= |\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS}|^2 \\ &= \left|\frac{1}{3}(1-r)\vec{a} + \left(\frac{1}{2}r-s\right)\vec{b} + \frac{1}{2}r\vec{c}\right|^2 \\ &= \frac{1}{9}(1-r)^2 + \left(\frac{1}{2}r-s\right)^2 + \frac{1}{4}r^2 + \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{3}(1-r)\left(\frac{1}{2}r-s\right) + \frac{1}{6}r(1-r) + \frac{1}{2}r\left(\frac{1}{2}r-s\right)\right\} \\ &= \frac{11}{18}r^2 - \frac{2}{9}r + s^2 - sr + \frac{1}{9} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{12}r^2 + \frac{1}{3}r - \frac{1}{6}sr - \frac{1}{3}s\right) \\ &= \frac{5}{9}r^2 - \frac{10}{9}sr + s^2 - \frac{2}{9}s + \frac{1}{9} \\ &= \frac{5}{9}(r-s)^2 + \frac{4}{9}\left(s - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{12}\end{aligned}$$

より、 $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$ であるから、 $r = s = \frac{1}{4}$ で $|\overrightarrow{SR}|^2$ は最小値 $\frac{1}{12}$ をとる。すなわち、

$|\overrightarrow{SR}|^2 + |\overrightarrow{TR}|^2$ の最小値は $\frac{1}{6}$ であり、このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SR} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{TR} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{8}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値} : \frac{1}{6}, \quad \overrightarrow{SR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{TR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$$

〔Ⅳ〕

(1)

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} \text{ であるから, } \cos \theta \text{ は } t \text{ を用いて} \\ t^2 &= \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} \\ \Leftrightarrow t^2(1+\cos \theta) &= 1-\cos \theta \quad (\because \cos \theta > -1) \\ \Leftrightarrow (t^2+1)\cos \theta &= 1-t^2 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

と表せる。よって

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1-a^2}{2\pi \left(1+a^2-2a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} \\ &= \frac{(1-a^2)(1+t^2)}{2\pi \left\{ (1+a^2)(1+t^2)-2a(1-t^2) \right\}} \\ &= \frac{(1-a^2)(1+t^2)}{2\pi (1+a^2+t^2+t^2a^2-2a+2at^2)} \\ &= \frac{(1-a^2)(1+t^2)}{2\pi \left\{ (a+1)^2t^2+(a-1)^2 \right\}} \\ &= \frac{\frac{1-a}{1+a}(1+t^2)}{2\pi \left\{ \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^2+t^2 \right\}} \end{aligned}$$

であるから,

$$b = \frac{1-a}{1+a}$$

である。

(答) $b = \frac{1-a}{1+a}$

(2)

まず

$$\int_c^{c+2\pi} g(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta - \int_0^c g(\theta) d\theta + \int_{2\pi}^{c+2\pi} g(\theta) d\theta \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで $s = \theta - 2\pi$ とおくと, $ds = d\theta$ であり, また $\theta: 2\pi \rightarrow c+2\pi$ のとき $s: 0 \rightarrow c$ であるから, $g(\theta)$ が周期 2π の周期関数であることに注意すると

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^{c+2\pi} g(\theta) d\theta &= \int_0^c g(s+2\pi) ds \\ &= \int_0^c g(s) ds \\ &= \int_0^c g(\theta) d\theta \end{aligned}$$

となることが分かる。したがって①は

$$\int_c^{c+2\pi} g(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta$$

となり, 題意は示された。

(証明終)

(3)

$t = b \tan u$ を $f_1(t)$ に代入すると

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{b(1+b^2 \tan^2 u)}{2\pi (b^2+b^2 \tan^2 u)} \\ &= \frac{1+b^2 \tan^2 u}{2\pi b(1+\tan^2 u)} \end{aligned}$$

より, $f_2(u) = \frac{1+b^2 \tan^2 u}{2\pi b(1+\tan^2 u)}$ である。次に $b \tan u = \tan \frac{\theta}{2}$ の両辺を微分して

$$\frac{b}{\cos^2 u} du = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

が得られるため,

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{2b \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 u}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} f_2(u) \frac{d\theta}{du} &= \frac{1+b^2 \tan^2 u}{2\pi b(1+\tan^2 u)} \cdot \frac{2b \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 u} \\ &= \frac{1+\tan^2 \frac{\theta}{2}}{2\pi \cdot \frac{1}{\cos^2 u}} \cdot \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 u} \\ &= \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{2}{\cos^2 u}} \\ &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

となり, $h = \frac{1}{\pi}$ と求まる。

(答) $h = \frac{1}{\pi}$

(4)

定積分 $\int_0^{2\pi} f(\theta-r) \cos \theta d\theta$ について, $v = \theta - r$ で置換積分をする。 $dv = d\theta$ であり, 積分区間は以下のように対応する。

θ	0	$\rightarrow$	2π
v	$-r$	$\rightarrow$	$2\pi-r$

以上より

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} f(\theta-r) \cos \theta d\theta \\ &= \int_{-r}^{2\pi-r} f(v) \cos(v+r) dv \\ &= \int_{-r}^{2\pi-r} f(v) (\cos r \cos v - \sin r \sin v) dv \end{aligned}$$

となる。ここで, $f(v) \cos v, f(v) \sin v$ はともに連続で 2π を周期とする周期関数であるから,

(2)で示した結果を用いて式変形すると

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} f(\theta-r) \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(v) (\cos r \cos v - \sin r \sin v) dv \\ &= \cos r \cdot \int_0^{2\pi} f(v) \cos v dv - \sin r \cdot \int_0^{2\pi} f(v) \sin v dv \end{aligned}$$

となる。 $f(\theta)$ も連続で 2π を周期とする周期関数であり, 問題文より

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \pi h = \pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1 \text{ であることから, } \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1 \text{ である。これに注意して}$$

$\int_0^{2\pi} f(v) \cos v dv$ を計算すると

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(v) \cos v dv &= \int_0^{2\pi} \frac{(1-a^2) \cos v}{2\pi (1+a^2-2a \cos v)} dv \\ &= \frac{1-a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos v}{1+a^2-2a \cos v} dv \\ &= \frac{1-a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1+a^2}{2a(1+a^2-2a \cos v)} - \frac{1}{2a} \right\} dv \\ &= \frac{1+a^2}{2a} \int_0^{2\pi} \frac{1-a^2}{2\pi (1+a^2-2a \cos v)} dv - \frac{1-a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2a} dv \\ &= \frac{1+a^2}{2a} \int_0^{2\pi} f(v) dv - \frac{1-a^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2a} v \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1+a^2}{2a} \cdot 1 - \frac{1-a^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{a} \\ &= a \end{aligned}$$

となる。一方 $\int_0^{2\pi} f(v) \sin v dv$ は

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(v) \sin v dv &= \int_0^{2\pi} \frac{(1-a^2) \sin v}{2\pi (1+a^2-2a \cos v)} dv \\ &= \frac{1-a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-(\cos v)'}{1+a^2-2a \cos v} dv \\ &= \frac{1-a^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2a} \log |1+a^2-2a \cos v| \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。以上より, 求める値は

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\theta-r) \cos \theta d\theta &= \cos r \cdot a + \sin r \cdot 0 \\ &= a \cos r \end{aligned}$$

である。

(答) $\int_0^{2\pi} f(\theta-r) \cos \theta d\theta = a \cos r$