

[I]

[解答]

(1)	ア	イ	ウ
	60	522	208
(2)	エ	オ	
	$x > 3$	$x \geq 1 + 2\sqrt{2}$	
(3)	カ	キ	ク
	$2x + 8$	24	36
(4)	ケ	コ	
	-2	-3	

〔Ⅱ〕

(1)

条件より,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2+1}{2-1} S_1 \\ &= 3a_1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

である。 $n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+1}{n-1} S_{n-1} \\ \Leftrightarrow S_{n-1} &= \frac{n-1}{n+1} a_n \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立ち、 $\textcircled{1}$ の n に $n-1$ を代入して,

$$S_{n-2} = \frac{n-2}{n} a_{n-1} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ より,

$$\begin{aligned} S_{n-1} - S_{n-2} &= \frac{n-1}{n+1} a_n - \frac{n-2}{n} a_{n-1} \\ \Leftrightarrow a_{n-1} &= \frac{n-1}{n+1} a_n - \frac{n-2}{n} a_{n-1} \\ \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} a_n &= \frac{2(n-1)}{n} a_{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{2(n+1)}{n} a_{n-1} \end{aligned}$$

となる。この漸化式は、 $n=2$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{2(n+1)}{n} a_{n-1} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

(2)

(1)で求めた漸化式を変形すると,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(n+1)}{n} a_{n-1} \\ \Leftrightarrow \frac{a_n}{n+1} &= 2 \cdot \frac{a_{n-1}}{n} \\ \Leftrightarrow b_n &= 2b_{n-1} \end{aligned}$$

となる。また、 $b_1 = \frac{a_1}{1+1} = 1$ である。よって、数列 $\{b_n\}$ は初項1、公比2の等比数列であるから、その一般項は、

$$b_n = 2^{n-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_n = 2^{n-1}$$

(3)

(2)より,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n+1} &= 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= (n+1) \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

となる。また、 $S_1 = a_1 = 2$ であり、 $n \geq 2$ のとき $\textcircled{1}$ より,

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= \frac{n-1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow S_{n-1} &= (n-1) \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

となるので,

$$S_n = n \cdot 2^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = (n+1) \cdot 2^{n-1}, \quad S_n = n \cdot 2^n$$

〔Ⅲ〕

(1)

$f(x)$ を微分すると、 $f'(x)=3(x^2-p)$ となる。よって、点 $(t, f(t))$ における C の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= 3(t^2-p)(x-t) + t^3 - 3pt \\ &= 3(t^2-p)x - 2t^3 \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad y = 3(t^2 - p)x - 2t^3$$

(2)

C の接線が点 $(-1, 3)$ を通るので、

$$\begin{aligned} 3 &= 3(t^2 - p)(-1) - 2t^3 \\ \Leftrightarrow 2t^3 + 3t^2 + 3(1-p) &= 0 \qquad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たす。3次関数では、接点の個数と接線の本数が一致するから、 $\textcircled{1}$ が異なる2つの実数解をもつような p の条件を考えればよい。 $g(t) = 2t^3 + 3t^2 + 3(1-p)$ とおく。微分すると、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 6t^2 + 6t \\ &= 6t(t+1) \end{aligned}$$

となる。 $g'(t)=0$ となる t は、

$$g'(t)=0 \Leftrightarrow t = -1, 0$$

であるから、増減表は以下のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、 $\textcircled{1}$ が異なる2つの実数解をもつための p の条件は、 $g(-1)=0$ または $g(0)=0$ となる。

これらを変形すると、

$$\begin{aligned} g(-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -3p + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(1-p) &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad p = 1, \frac{4}{3}$$

(3)

点 $(-1, 3)$ を通る接線の本数が3本となる条件は(2)より、

$$\begin{aligned} g(-1) > 0 \text{ かつ } g(0) < 0 \\ \Leftrightarrow -3p + 4 > 0 \text{ かつ } 3(1-p) < 0 \\ \therefore 1 < p < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。このとき、 $t = \alpha, \beta, \gamma$ は $\textcircled{1}$ の3つの実数解より解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{3}{2} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{3-3p}{2} \end{cases}$$

となる。また、 $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ であるから、これら4つの式から

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ (p, \gamma) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

となり、 $1 < p < \frac{4}{3}$ を満たす。 α, β は2次方程式

$$t^2 + t - \frac{1}{2} = 0$$

の2解であり、 $\alpha < \beta$ より

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right)$$

となる。

$$(答) \quad p = \frac{7}{6}, \alpha = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$