

2022年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)のそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 氏名の記入欄は、解答用紙(一)、(二)の表面にそれぞれ1か所ある。合計2か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (4) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (5) 問題紙の本文は2ページである。
- (6) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (7) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (8) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (9) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余 白

〔Ⅰ〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

- (1) 1枚の硬貨と、1から4までの異なる番号をつけた4枚のカードに対して、「硬貨を投げ、裏が出れば0点を獲得する。表が出れば、4枚のカードから無作為に1枚を取り出して、取り出したカードの番号と同じ点数を獲得する。取り出したカードはもとに戻す」という試行を n 回繰り返す。この n 回の試行で獲得した点数の合計が2以上の偶数になる確率を p_n とおく。このとき、 $p_1 = \text{ア}$, $p_2 = \text{イ}$ であり、 p_{n+1} を p_n で表すと $p_{n+1} = \text{ウ} p_n + \text{エ}$ となる。 p_n を n の式で表すと、 $p_n = \text{オ}$ である。
- (2) i を虚数単位とする。複素数平面上の3点 $A(2i)$, $B(-1+i)$, $C(1+i)$ を考える。点 D と点 E は、点 A を原点を中心として、それぞれ $\frac{2}{3}\pi$ と $-\frac{2}{3}\pi$ だけ回転した点とする。点 D を表す複素数の実部は , 点 E を表す複素数の虚部は である。点 F は、点 C を点 B を中心として $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、点 B からの距離を $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 倍した点とする。点 F を表す複素数の実部は , 虚部は である。六角形 $ABDFEC$ の面積は である。

〔Ⅱ〕 条件(*) $t^2 \nmid 5$ を満たす実数 t に対して、 $f(t) = \frac{t^2 - 4t + 5}{t^2 - 5}$, $g(t) = \frac{-2t^2 + 10t - 10}{t^2 - 5}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 条件(*) を満たすすべての t に対して、点 $(f(t), g(t))$ が双曲線 $H: \alpha x^2 - \beta y^2 = 1$ 上にあるとき、定数 α, β の値を求めよ。
- (2) 条件(*) を満たすすべての t に対して、2つの等式 $f(-t) = af(t) + bg(t)$, $-g(-t) = cf(t) + dg(t)$ が同時に成り立つとき、定数 a, b, c, d の値を求めよ。
- (3) (2) の定数 a, b, c, d を用いて、 p', q' を2つの式 $p' = ap + bq$, $q' = cp + dq$ で定める。 $p = 1, q = 2$ のとき、 p', q' の値を求めよ。
- (4) (1) の双曲線 H 上にある任意の点 (p, q) に対して、(3) の2つの式で定まる点 (p', q') も H 上にあることを示せ。
- (5) $r_1 = 1, r_{n+1} = 9r_n + 4\sqrt{5r_n^2 - 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{r_n\}$ の各項が正の整数であることを示せ。

〔Ⅲ〕座標空間内の四面体 $OABC$ は、 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 1$ 、 $\cos \angle AOB = \cos \angle AOC = \cos \angle BOC = \frac{1}{3}$ を満たしている。この四面体に対して、辺 OA 上の点と辺 BC 上の点を結ぶ線分の長さを L とする。2 点がそれぞれ辺 OA 、辺 BC 上の点全体を動いたとき、 L を最小にする辺 OA 上の点を P 、辺 BC 上の点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$ を $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ を用いて表せ。

(2) $(\vec{OA} + x\vec{OB} + y\vec{OC}) \cdot \vec{PQ} = 0$ かつ $(\vec{OA} + x\vec{OB} + y\vec{OC}) \cdot \vec{OB} = 0$ を満たす実数 x, y を求めよ。

(3) 3 点 R, S, T がそれぞれ線分 PQ 、辺 OB 、辺 OC 上の点全体を動いたとき、 $|\vec{SR}|^2 + |\vec{TR}|^2$ の最小値を求めよ。また、そのときの $\vec{SR}$, $\vec{TR}$ を $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ を用いて表せ。

〔Ⅳ〕定数 a は $0 < a < 1$ とする。 θ を実数とし、関数

$$f(\theta) = \frac{1 - a^2}{2\pi(1 + a^2 - 2a \cos \theta)}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) $t = \tan \frac{\theta}{2}$ ($-\pi < \theta < \pi$) において、 $f(\theta)$ を t の式で表す。この t の式を $f_1(t)$ とすると、 t の関数 $f_1(t)$ はある定数 b を用いて、 $f_1(t) = \frac{b(1+t^2)}{2\pi(b^2+t^2)}$ と表せる。 b を a の式で表せ。

(2) $g(\theta)$ は連続で 2π を周期とする周期関数とする。 c を実数とすると、等式 $\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = \int_c^{c+2\pi} g(\theta) d\theta$ が成り立つことを示せ。

(3) $-\pi < \theta < \pi$ のとき、実数 u ($-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$) は (1) の b を用いて $b \tan u = \tan \frac{\theta}{2}$ を満たすとする。このとき、 $f(\theta)$ を u で表した式を $f_2(u)$ とし、式 $f_2(u) \frac{d\theta}{du}$ の値を h とする。 h を求めよ。

(4) r を実数とする。定積分 $\int_0^{2\pi} f(\theta - r) \cos \theta d\theta$ を a と r の式で表せ。ただし、必要ならば、(3) の h に対して、等式 $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \pi h$ が成り立つことを証明なしで用いてよい。

以下余白

