〔Ⅰ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{n}{3\cdot 2^{n-1}}$	$-\log 2$
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	5	$\frac{2}{3}$	$-\frac{6}{41}$	3	$\sqrt{10}$

〔解説〕

(1)

問題の条件より，$a_1=\frac{1}{6}, b_1=\frac{1}{3}, c_1=\frac{1}{3}, d_1=\frac{1}{6}$ である。また，2 個のさいころを同時に投げるとき，出た目の積が奇数となる確率は b_2+d_2 であり，このとき，2 個のさいころの出た目は共に奇数であるため，

$$\begin{aligned} b_2+d_2 &= (b_1+d_1)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。また，2 個のさいころを同時に投げるとき，出た目の積を 4 で割ったあまりが 2 となるのは 2 個のうち，1 個は 2 か 6 が出て，もう一方は奇数が出るときである。よって，

$$\begin{aligned} c_2 &= {}_2C_1\cdot c_1\cdot(b_1+d_1) \\ &= 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。次に，n 個のさいころを同時に投げるときを考える。n 個のさいころの出た目の積が奇数となる確率は b_n+d_n であり，このとき，出た目は全て奇数となるため，

$$\begin{aligned} b_n+d_n &= (b_1+d_1)^n \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

である。また，n 個のさいころの出た目の積を 4 で割ったあまりが 2 となるとき，1 個は 2 か 6 が出て，残りの $n-1$ 個は奇数となるため，

$$\begin{aligned} c_n &= {}_nC_1\cdot c_1\cdot(b_1+d_1)^{n-1} \\ &= n\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{n}{3\cdot 2^{n-1}} \end{aligned}$$

となる。ここで，$a_n+b_n+c_n+d_n=1$ より，

$$\begin{aligned} 1-a_n &= b_n+d_n+c_n \\ &= \frac{1}{2^n}+\frac{n}{3\cdot 2^{n-1}} \\ &= \frac{n}{2^n}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

となるため，

$$\begin{aligned} \log(1-a_n) &= \log\left\{\frac{n}{2^n}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)\right\} \\ &= -n\log 2+\log n+\log\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって，$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ より，求める極限値は，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-a_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{-n\log 2+\log n+\log\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)\right\} \\ &= -\log 2+\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right) \\ &= -\log 2+0+0\cdot\log\left(\frac{2}{3}+0\right) \\ &= -\log 2 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} &|3z+it|=|(t+2i)z-1| \\ \Leftrightarrow\ &|3z+it|^2=|(t+2i)z-1|^2 \\ \Leftrightarrow\ &(3z+it)(3\bar{z}-it)=\{(t+2i)z-1\}\{(t-2i)\bar{z}-1\} \\ \Leftrightarrow\ &9z\bar{z}-3tiz+3ti\bar{z}+t^2=(t^2+4)z\bar{z}-(t+2i)z-(t-2i)\bar{z}+1 \\ \Leftrightarrow\ &(t^2-5)z\bar{z}-\{t-(3t-2)i\}z-\{t+(3t-2)i\}\bar{z}+1-t^2=0 \end{aligned}$$

となるため，$t^2=5$ のとき，C_t は円でない。$t^2\neq 5$ のとき，

$$\begin{aligned} &(t^2-5)z\bar{z}-\{t-(3t-2)i\}z-\{t+(3t-2)i\}\bar{z}+1-t^2=0 \\ \Leftrightarrow\ &z\bar{z}-\frac{t-(3t-2)i}{t^2-5}z-\frac{t+(3t-2)i}{t^2-5}\bar{z}+\frac{1-t^2}{t^2-5}=0 \\ \Leftrightarrow\ &\left\{z-\frac{t+(3t-2)i}{t^2-5}\right\}\left\{\bar{z}-\frac{t-(3t-2)i}{t^2-5}\right\}=\frac{t+(3t-2)i}{t^2-5}\cdot\frac{t-(3t-2)i}{t^2-5}+\frac{t^2-1}{t^2-5} \\ \Leftrightarrow\ &\left|z-\frac{t+(3t-2)i}{t^2-5}\right|^2=\frac{t^4+4t^2-12t+9}{(t^2-5)^2} \end{aligned}$$

であり，

$$\frac{t^4+4t^2-12t+9}{(t^2-5)^2}=\frac{(t-1)^2\{(t+1)^2+6\}+2}{(t^2-5)^2}>0$$

となるため，C_t は円であり，中心を表す複素数 w は，

$$w=\frac{t+(3t-2)i}{t^2-5}$$

である。また，w の虚部が 0 となるのは，

$$\begin{aligned} &\frac{3t-2}{t^2-5}=0 \\ &\therefore t=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

のときであり，このとき，w の実部は，

$$\begin{aligned} \frac{t}{t^2-5} &= \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2-5} \\ &= -\frac{6}{41} \end{aligned}$$

である。さらに，$t\neq 0$ のとき，

$$\tan\theta=\frac{\frac{3t-2}{t^2-5}}{\frac{t}{t^2-5}}=3-\frac{2}{t}$$

であるため，

$$\lim_{t\to\infty}\tan\theta=3-0=3$$

である。また，

$$\begin{aligned} |w| &= \left|\frac{t+(3t-2)i}{t^2-5}\right| \\ &= \frac{\sqrt{t^2+(3t-2)^2}}{|t^2-5|} \\ &= \frac{\sqrt{10t^2-12t+4}}{|t^2-5|} \end{aligned}$$

となる。$t\to\infty$ より，$t>0$ と考えてもよく，$t>0$ のとき，

$$\begin{aligned} t|w| &= \frac{t\sqrt{10t^2-12t+4}}{|t^2-5|} \\ &= \frac{\sqrt{10-\frac{12}{t}+\frac{4}{t^2}}}{\left|1-\frac{5}{t^2}\right|} \end{aligned}$$

となる。したがって，

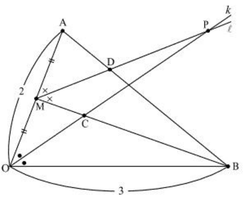
$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}t|w| &= \frac{\sqrt{10-0+0}}{|1-0|} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

問題の条件より，△OAB および各点は下図のようになる。



直線 k は ∠AOB の二等分線であるため，

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}:\mathrm{CM}&=\mathrm{BO}:\mathrm{OM}\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|:\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\\&=3:1\end{aligned}$$

である。すなわち，点 C は線分 BM を 3:1 に内分するため，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{m}$$

と表せる。$\vec{b}$ と $\vec{m}$ は一次独立であるため，求める値は，

$$r=\frac{1}{4},\ s=\frac{3}{4}$$

である。

（答）$r=\frac{1}{4},\ s=\frac{3}{4}$

(2)

△OMB について，三角形の成立条件より，

$$\begin{aligned}&3-1<x<3+1\\&\therefore 2<x<4\end{aligned}$$

である。ここで，直線 ℓ は ∠AMB の二等分線であるため，

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}:\mathrm{DB}&=\mathrm{AM}:\mathrm{MB}\\&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right|\\&=1:x\end{aligned}$$

である。すなわち，点 D は線分 AB を $1:x$ に内分するため，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MD}}&=\frac{x}{x+1}\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\frac{1}{x+1}\overrightarrow{\mathrm{MB}}\\&=\frac{x}{x+1}\vec{m}+\frac{1}{x+1}\left(\vec{b}-\vec{m}\right)\\&=\frac{1}{x+1}\vec{b}+\frac{x-1}{x+1}\vec{m}\end{aligned}$$

となる。$\vec{b}$ と $\vec{m}$ は一次独立であるため，求める式は，

$$t=\frac{1}{x+1},\ u=\frac{x-1}{x+1}$$

である。

（答）$t=\frac{1}{x+1},\ u=\frac{x-1}{x+1}$

(3)

点 P は直線 k 上の点であるため，(1)より，実数 v を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=v\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{1}{4}v\vec{b}+\frac{3}{4}v\vec{m}\end{aligned}$$

と表せる。$\vec{b}$ と $\vec{m}$ は一次独立であるため，$y=\frac{1}{4}v,\ z=\frac{3}{4}v$ が成り立つ。また，点 P は直線 ℓ 上の点であるため，(2)より，実数 w を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\vec{m}+w\overrightarrow{\mathrm{MD}}\\&=\frac{w}{x+1}\vec{b}+\left(1+\frac{x-1}{x+1}w\right)\vec{m}\end{aligned}$$

とおける。$\vec{b}$ と $\vec{m}$ は一次独立であるため，上の 2 式より，

$$\begin{cases}\frac{1}{4}v=\frac{w}{x+1} & \cdots①\\ \frac{3}{4}v=1+\frac{x-1}{x+1}w & \cdots②\end{cases}$$

が成り立つ。①×3−②より，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}v\cdot 3-\frac{3}{4}v=\frac{w}{x+1}\cdot 3-\left(1+\frac{x-1}{x+1}w\right)\\&\Leftrightarrow\frac{(4-x)w-(x+1)}{x+1}=0\\&\therefore w=\frac{x+1}{4-x}\ (\because 2<x<4)\end{aligned}$$

となる。よって，①より，

$$\begin{aligned}v&=\frac{4w}{x+1}\\&=\frac{4}{4-x}\end{aligned}$$

となるため，求める式は，

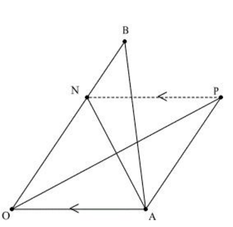
$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{4}v\\&=\frac{1}{4-x}\\z&=\frac{3}{4}v\\&=\frac{3}{4-x}\end{aligned}$$

である。

（答）$y=\frac{1}{4-x},\ z=\frac{3}{4-x}$

(4)

点 P を通り直線 OA に平行な直線と直線 OB の交点を N とすると，△OAB と点 N は下図のようになる。



直線 OA と直線 PN は平行であるため，△OAP＝△OAN であり，(3)より，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=y\vec{b}=\frac{1}{4-x}\vec{b}$ である。また，$2<x<4$ より，$\mathrm{ON}=\frac{1}{4-x}\mathrm{OB}$ であるため，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAP}:\triangle\mathrm{OAB}&=\triangle\mathrm{OAN}:\triangle\mathrm{OAB}\\&=\mathrm{ON}:\mathrm{OB}\\&=\frac{1}{4-x}:1\end{aligned}$$

となる。したがって，△OAP:△OAB＝2:3より，求める値は，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4-x}:1=2:3\\&\Leftrightarrow 4-x=\frac{3}{2}\\&\therefore x=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

となる。

（答）$x=\frac{5}{2}$

〔Ⅲ〕

(1)

放物線 C の方程式は $y=\frac{3}{8}x^2$ より，$y'=\frac{3}{4}x$ であるから，求める接線の方程式は

$$y-\frac{3}{8}s^2=\frac{3}{4}s(x-s)$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}sx-\frac{3}{8}s^2$$

と表せる。よって傾きは $\frac{3}{4}s$，y 切片は $-\frac{3}{8}s^2$ である。

(答) 傾き：$\frac{3}{4}s$，y 切片：$-\frac{3}{8}s^2$

(2)

(1)より，l, m の方程式はそれぞれ

$$l: y=\frac{3}{4}\alpha x-\frac{3}{8}\alpha^2$$
$$m: y=\frac{3}{4}\beta x-\frac{3}{8}\beta^2$$

と表される。これらが共に点 P を通ることから

$$\begin{cases}-\sqrt{18p^2+2}=3\alpha p-\frac{3}{8}\alpha^2\\ -\sqrt{18p^2+2}=3\beta p-\frac{3}{8}\beta^2\end{cases}$$

が成り立つ。したがって α, β は，x に関する 2 次方程式

$$3x^2-24px-8\sqrt{18p^2+2}=0 \qquad \cdots ①$$

の異なる 2 つの実数解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=8p,\ \alpha\beta=-\frac{8\sqrt{18p^2+2}}{3}$$

と求まる。

(答) $\alpha+\beta=8p,\ \alpha\beta=-\frac{8\sqrt{18p^2+2}}{3}$

(3)

直線 LM の傾きは

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{3}{8}\beta^2-\frac{3}{8}\alpha^2\right)=\frac{3}{8}(\beta+\alpha)$$
$$=3p$$

である。よって直線 LM の方程式は

$$y-\frac{3}{8}\alpha^2=3p(x-\alpha)$$

と表せるから，y 切片は $x=0$ を代入して

$$y=\frac{3}{8}\alpha^2-3p\alpha \qquad \cdots ②$$

となる。ここで，α は 2 次方程式①の解であるから

$$\alpha^2=8p\alpha+\frac{8\sqrt{18p^2+2}}{3}$$

が成り立つ。これを②に代入すると

$$y=\frac{3}{8}\left(8p\alpha+\frac{8\sqrt{18p^2+2}}{3}\right)-3p\alpha$$
$$=\sqrt{18p^2+2}$$

が得られる。続いて点と直線の距離の公式を用いると，線分 OH の長さは

$$\mathrm{OH}=\frac{\left|-3p\alpha+\frac{3}{8}\alpha^2\right|}{\sqrt{9p^2+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{18p^2+2}}{\sqrt{9p^2+1}}$$
$$=\sqrt{2}$$

と求められる。

(答) 直線 LM の傾き：$3p$，y 切片：$\sqrt{18p^2+2}$，$\mathrm{OH}=\sqrt{2}$

(4)

点 H の座標を $\mathrm{H}(a, b)$ とすると，OH⊥LM より

$$\frac{b}{a}\cdot 3p=-1$$
$$\therefore a=-3pb$$

である。また点 H は直線 LM 上にあるから

$$b=3p\alpha+\sqrt{18p^2+2}$$

が成り立つ。以上より

$$b=3p(-3pb)+\sqrt{18p^2+2}$$
$$=-9p^2b+\sqrt{18p^2+2}$$
$$\therefore b=\frac{\sqrt{18p^2+2}}{1+9p^2}>0$$

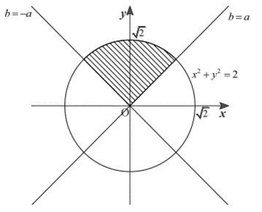
である。ここで(3)より

$$a^2+b^2=2$$

であり，$p=-\frac{a}{3b}$ を $-\frac{1}{3}\leqq p\leqq\frac{1}{3}$ に代入すると

$$-\frac{1}{3}\leqq-\frac{a}{3b}\leqq\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow -b\leqq a\leqq b$$

となるから，点 H は下図の斜線部の円周上を動く。



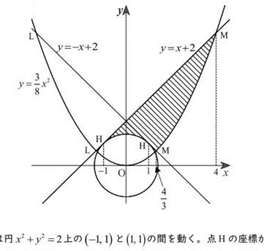
したがって求める軌跡の長さは

$$2\pi\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

(5)



(4)より，点 H は円 $x^2+y^2=2$ 上の $(-1, 1)$ と $(1, 1)$ の間を動く。点 H の座標が $(-1, 1)$ のとき，直線 LM と直線 OH が直交することから，直線 LM の傾きは 1 であり，線分 HM の方程式は $y=x+2\ (-1\leqq x\leqq 4)$ となる。同様にして，点 H の座標が $(1, 1)$ のとき，線分 HM の方程式は $y=-x+2\left(1\leqq x\leqq\frac{4}{3}\right)$ となる。よって点 H が円 $x^2+y^2=2$ 上の $(-1, 1)$ と $(1, 1)$ の間を動くとき，点 M は放物線 $y=\frac{3}{8}x^2$ 上の $(4, 6)$ と $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ の間を動くから，線分 HM が通過する領域は上図の斜線部である(境界を含む)。よって求める面積は

$$\int_{-1}^{4}(x+2)dx-\int_{\frac{1}{3}}^{4}\frac{3}{8}x^2dx-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 2\pi-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{4}-\left[\frac{1}{8}x^3\right]_{\frac{1}{3}}^{4}-\frac{5}{18}-\frac{\pi}{2}-1$$
$$=\left(8+8-\frac{1}{2}+2\right)-8+\frac{8}{27}-\frac{23}{18}-\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{230}{27}-\frac{\pi}{2}$$

である。

(答) $\frac{230}{27}-\frac{\pi}{2}$

〔Ⅳ〕

(1)

$1000 \leqq n \leqq 27000$ において，

$$\begin{aligned}
&S_{n-1}=S_n \\
&\Leftrightarrow S_n-S_{n-1}=0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} f(k)-\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=0 \\
&\Leftrightarrow f(n)=0 \\
&\therefore \sin\left(\pi n^{\frac{1}{3}}\right)=0
\end{aligned}$$

と変形できる。$\sin\left(\pi n^{\frac{1}{3}}\right)=0$ となるのは n が立方数となるときである。

$10^3=1000,\ 30^3=27000$ より，条件を満たす n は $30-10+1=21$(個)である。

(答) 21

(2)

部分積分により，

$$\begin{aligned}
\int t^2 \sin t dt &= -t^2\cos t+\int 2t\cos t dt \\
&= -t^2\cos t+2t\sin t-2\int \sin t dt \\
&= -t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t+C \quad (C\text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

と求まる。また $\int_1^{m^3} f(x)dx$ に関して，$\pi x^{\frac{1}{3}}=t$ とすると，$\pi^3 x=t^3$ より $\pi^3 dx=3t^2 dt$ が得られる。積分区間の対応は以下のようになる。

x	1	$\to$	m^3
t	π	$\to$	πm

したがって，

$$\begin{aligned}
\int_1^{m^3} f(x)dx &= \int_{\pi}^{m\pi} \sin t\cdot\frac{3}{\pi^3}t^2 dt \\
&= \frac{3}{\pi^3}\int_{m}^{m\pi} t^2\sin t dt \\
&= \frac{3}{\pi^3}\left[-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t\right]_m^{m\pi} \\
&= \frac{3}{\pi^3}\left(-m^2\pi^2\cos m\pi+2\cos m\pi-\pi^2+2\right) \\
&= \left(-\frac{3m^2}{\pi}+\frac{6}{\pi^3}\right)\cos m\pi-\frac{3\left(\pi^2-2\right)}{\pi^3}
\end{aligned}$$

となる。よって，$p=-\frac{3}{\pi},\ q=\frac{6}{\pi^3},\ r=-\frac{3\left(\pi^2-2\right)}{\pi^3}$ である。

(答) $-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t+C$ （C は積分定数），$p=-\frac{3}{\pi},\ q=\frac{6}{\pi^3},\ r=-\frac{3\left(\pi^2-2\right)}{\pi^3}$

(3)

$k \leqq x \leqq k+1$ のとき $f(x)-\frac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}<f(k+1)<f(x)+\frac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ が成り立つから，辺々を x について積分して，

$$\begin{aligned}
&\int_k^{k+1}\left\{f(x)-\frac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right\}dx<\int_k^{k+1} f(k+1)dx<\int_k^{k+1}\left\{f(x)+\frac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right\}dx \\
&\Leftrightarrow \int_k^{k+1} f(x)dx-\int_k^{k+1}\frac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx<f(k+1)<\int_k^{k+1} f(x)dx+\int_k^{k+1}\frac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx
\end{aligned}$$

となる。辺々を $k=1\sim m^3-1$ で足し合わせることで，

$$\begin{aligned}
&\int_1^{m^3} f(x)dx-\int_1^{m^3}\frac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx<\sum_{k=1}^{m^3-1} f(k+1)<\int_1^{m^3} f(x)dx+\int_1^{m^3}\frac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx \\
&\Leftrightarrow \int_1^{m^3} f(x)dx-\left[\pi x^{\frac{1}{3}}\right]_1^{m^3}<\sum_{k=1}^{m^3} f(k)<\int_1^{m^3} f(x)dx+\left[\pi x^{\frac{1}{3}}\right]_1^{m^3} \quad \left(\because f(1)=0\right) \\
&\therefore \int_1^{m^3} f(x)dx-\pi(m-1)<S_{m^3}<\int_1^{m^3} f(x)dx+\pi(m-1)
\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(4)

(1)より $S_{n-1}=S_n,\ 1000 \leqq n \leqq 27000$ を同時に満たすのは，$n=m^3\ (10 \leqq m \leqq 30)$ と表せるときである。またこのとき，(2), (3)より

$$\left(-\frac{3m^2}{\pi}+\frac{6}{\pi^3}\right)\cos m\pi-\frac{3\left(\pi^2-2\right)}{\pi^3}-\pi(m-1)<S_{m^3}<\left(-\frac{3}{\pi}m^2+\frac{6}{\pi^3}\right)\cos m\pi-\frac{3\left(\pi^2-2\right)}{\pi^3}+\pi(m-1)$$

となる。

[1] m が奇数のとき

左辺は

$$\frac{3m^2}{\pi}-\frac{3}{\pi}-\pi(m-1)$$

と変形できる。$3<\pi<4,\ 10 \leqq m$ より，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &> \frac{3}{4}m^2-\frac{3}{3}-4(m-1) \\
&= \frac{3}{4}m^2-4m+3 \\
&= \frac{3}{4}m\left(m-\frac{16}{3}\right)+3 \\
&> 0
\end{aligned}$$

となるから，$0<S_{m^3}$ である。

[2] m が偶数のとき

右辺は

$$-\frac{3m^2}{\pi}-\frac{3}{\pi}+\frac{12}{\pi^3}+\pi(m-1)$$

と変形できる。$3<\pi<4,\ 10 \leqq m$ より，

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &< -\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{4}+\frac{12}{3^3}+4(m-1) \\
&= -\frac{3}{4}m^2+4m-\frac{155}{36} \\
&= -\frac{3}{4}m\left(m-\frac{16}{3}\right)-\frac{155}{36} \\
&< 0
\end{aligned}$$

となるから，$S_{m^3}<0$ である。

以上，[1], [2]より，3つの条件を同時に満たす m は $m=10, 12, \cdots, 30$ の11個存在する。つまり，求める n の個数は11個である。

(答) 11

(5)

$S_{n-1} \leqq 0<S_n$ となるためには $f(n)>0$ が必要である。ここで，

$$f(n)>0 \Leftrightarrow (2l)^3<n<(2l+1)^3\ \left(l=5, 6, \cdots, 14\ (\because 1000 \leqq n \leqq 27000)\right)$$

である。また(4)より，$S_{(2l)^3}<0<S_{(2l+1)^3}$ となる。このことと，$(2l)^3 \leqq n \leqq (2l+1)^3$ のとき $f(n) \geqq 0$ より S_n は単調増加することから，2つの条件を同時に満たす n は l の各値につき1つのみ存在する。よって，求める n の個数は10個である。

(答) 10