〔Ⅰ〕

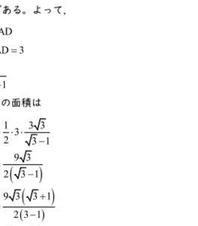
〔解答〕

(1)	ア		
	$\dfrac{9(3+\sqrt{3})}{4}$		
(2)	イ	ウ	エ
	5	3	10
(3)	オ	カ	キ
	723	3	6
(4)	ク	ケ	コ
	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{3}{2}<x\leqq 4$

〔解説〕

(1)

直線ABと，点Cから直線ABにおろした垂線の交点をDとすると，下図のようになる。



$\angle\mathrm{CAD}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，

$$\mathrm{CD}=\mathrm{AD}\cdot\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\mathrm{AD}$$

である。一方，$\mathrm{AB}=3$ より $\mathrm{BD}=3+\mathrm{AD}$ である。$\triangle\mathrm{BDC}$ は $\angle\mathrm{D}=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから，$\mathrm{BD}=\mathrm{CD}$ である。よって，

$$3+\mathrm{AD}=\sqrt{3}\mathrm{AD}$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt{3}-1)\mathrm{AD}=3$$
$$\therefore\mathrm{AD}=\frac{3}{\sqrt{3}-1}$$

となるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}&=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\\&=\frac{9\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)}\\&=\frac{9\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(3-1)}\\&=\frac{9(3+\sqrt{3})}{4}\end{aligned}$$

である。

(2)

$$\int_c^x tf(t)\,dt=x^3+cx^2-c^3-5c^2$$

において，$x=c$ を代入すると，

$$0=c^3+c^3-c^3-5c^2$$
$$\Leftrightarrow c^3-5c^2=0$$
$$\Leftrightarrow c^2(c-5)=0$$
$$\therefore c=5\ (\because c>0)$$

が得られる。このとき，$f(t)=at+b$ とおき，

$$\int_c^x tf(t)\,dt=x^3+cx^2-c^3-5c^2$$

の両辺を x で微分すると，

$$xf(x)=3x^2+10x$$
$$\Leftrightarrow x(ax+b)=3x^2+10x$$
$$\Leftrightarrow ax^2+bx=3x^2+10x$$

となる。$ax^2+bx=3x^2+10x$ は x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases}a=3\\b=10\end{cases}$$

である。

(3)

3進法で $210210_{(3)}$ と表される自然数を9進法で表すと，

$$\begin{aligned}210210_{(3)}&=2\cdot3^5+3^4+2\cdot3^2+3\\&=(2\cdot3+1)\cdot(3^2)^2+2\cdot(3^2)+3\\&=7\cdot9^2+2\cdot9+3\\&=723_{(9)}\end{aligned}$$

より，$723_{(9)}$ となる。また，p を3以上の自然数とする。このとき，p 進法で表すと $222222_{(p)}$ となる自然数，および p^2 進法で表すと $888_{(p^2)}$ となる自然数を，それぞれ10進法で表すと，

$$222222_{(p)}=2p^5+2p^4+2p^3+2p^2+2p+2$$
$$888_{(p^2)}=8p^5+8p^2+8$$

となる。これらが一致するから，

$$2p^5+2p^4+2p^3+2p^2+2p+2=8p^4+8p^2+8$$
$$\Leftrightarrow(2p+2)p^4+(2p+2)p^2+(2p+2)=8p^4+8p^2+8$$
$$\Leftrightarrow(2p-6)(p^4+p^2+1)=0$$
$$\therefore p=3\ (\because p^4+p^2+1>0)$$

が得られる。さらに，q を3以上の自然数，s を $1\leqq s\leqq q-1$, $s\leqq 9$ をみたす整数とする。このとき，q^2 進法で表すと $7777_{(q^2)}$ となる自然数，および q 進法で表すと $\mathrm{sssssssss}_{(q)}$ となる自然数を，それぞれ10進法で表すと，

$$7777_{(q^2)}=7q^6+7q^4+7q^2+7$$
$$\mathrm{sssssssss}_{(q)}=sq^7+sq^6+sq^5+sq^4+sq^3+sq^2+sq+s$$

となる。これらが一致するから，

$$7q^6+7q^4+7q^2+7=sq^7+sq^6+sq^5+sq^4+sq^3+sq^2+sq+s$$
$$\Leftrightarrow 7q^6+7q^4+7q^2+7=(sq+s)q^6+(sq+s)q^4+(sq+s)q^2+(sq+s)$$
$$\Leftrightarrow(sq+s-7)(q^6+q^4+q^2+1)=0$$
$$\therefore s(q+1)=7\ (\because q^6+q^4+q^2+1>0)$$

となる。ここで，s, q は自然数であり，q は3以上より $q+1\geqq 4$ となる。したがって，

$$(s,q+1)=(1,7)$$
$$\Leftrightarrow(s,q)=(1,6)$$

となる。

(4)

$$\begin{aligned}f(x)&=\log_8(2x-3)\\&=\frac{\log_2\left\{2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right\}}{\log_2 8}\\&=\frac{1}{3}\left\{\log_2\left(x-\frac{3}{2}\right)+\log_2 2\right\}\\&=\frac{1}{3}\log_2\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

であるから，$f(x)=g(x-A)+B$ が成り立つような定数 A, B の値は，

$$A=\frac{3}{2},\ B=\frac{1}{3}$$

である。また，不等式

$$3\log_8(2x-3)\leqq 2+\log_2 5+\log_{0.5}x$$

において，真数条件より，$2x-3>0$ かつ $x>0$ であるから，$x>\dfrac{3}{2}$ である。このもとで不等式を解くと，

$$3\log_8(2x-3)\leqq 2+\log_2 5+\log_{0.5}x$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot\frac{\log_2(2x-3)}{\log_2 8}\leqq 2+\log_2 5+\frac{\log_2 x}{\log_2 0.5}$$
$$\Leftrightarrow\log_2(2x-3)\leqq 2+\log_2 5-\log_2 x$$
$$\Leftrightarrow\log_2 x(2x-3)\leqq\log_2 20$$

となり，底2は1よりも大きいから，

$$x(2x-3)\leqq 20$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-3x-20\leqq 0$$
$$\Leftrightarrow(x-4)(2x+5)\leqq 0$$
$$\therefore\frac{3}{2}<x\leqq 4\ \left(\because x>\frac{3}{2}\right)$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

$f(x)=x^3-4x+2$ を x で微分すると，

$$f'(x)=3x^2-4$$

となる。したがって，$\mathrm{P}_1(a,\ f(a))$ における C の接線 ℓ_1 の方程式は，

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$
$$\Leftrightarrow y=(3a^2-4)(x-a)+a^3-4a+2$$
$$\therefore y=(3a^2-4)x-2a^3+2$$

である。

（答） $y=(3a^2-4)x-2a^3+2$

(2)

$\mathrm{P}_n(a_n,\ f(a_n))$ における C の接線 ℓ_n の方程式は，

$$y=(3a_n{}^2-4)x-2a_n{}^3+2$$

である。したがって，曲線 C と直線 ℓ_n の共有点の x 座標は，

$$x^3-4x+2=(3a_n{}^2-4)x-2a_n{}^3+2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3a_n{}^2x+2a_n{}^3=0$$
$$\Leftrightarrow (x-a_n)^2(x+2a_n)=0$$
$$\therefore x=a_n,\ -2a_n$$

であるから，点 P_{n+1} の定義より

$$a_{n+1}=-2a_n$$

である。

（答） $a_{n+1}=-2a_n$

(3)

(2)より $a_{n+1}=-2a_n$ であるから，数列 $\{a_n\}$ は初項 a，公比 -2 の等比数列である。したがって，

$$a_n=(-2)^{n-1}a$$

である。また，

$$f(x)-\{(3a_n{}^2-4)x-2a_n{}^3+2\}=(x-a_n)^2(x-a_{n+1})$$

となる。以下，n の偶奇に注目して場合分けをする。

[1] n が奇数のとき

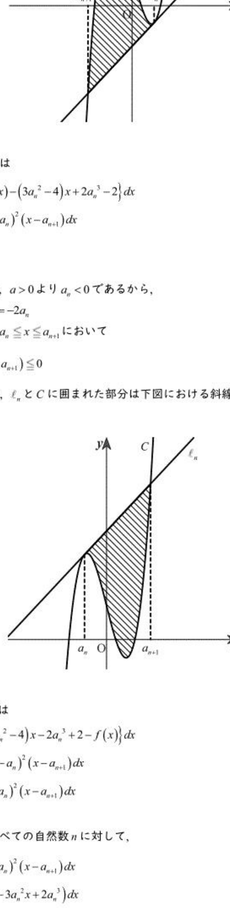
n が奇数のとき，$a>0$ より $a_n>0$ であるから，

$$a_{n+1}=-2a_n<0<a_n$$

である。また，$a_{n+1}\leqq x\leqq a_n$ において，

$$(x-a_n)^2(x-a_{n+1})\geqq 0$$

である。よって，ℓ_n と C に囲まれた部分は下図における斜線部である。



したがって，S_n は

$$S_n=\int_{a_{n+1}}^{a_n}\{f(x)-(3a_n{}^2-4)x+2a_n{}^3-2\}dx$$
$$=\int_{a_{n+1}}^{a_n}(x-a_n)^2(x-a_{n+1})dx$$

である。

[2] n が偶数のとき

n が偶数のとき，$a>0$ より $a_n<0$ であるから，

$$a_n<0<a_{n+1}=-2a_n$$

である。また，$a_n\leqq x\leqq a_{n+1}$ において

$$(x-a_n)^2(x-a_{n+1})\leqq 0$$

である。よって，ℓ_n と C に囲まれた部分は下図における斜線部である。

したがって，S_n は

$$S_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}\{(3a_n{}^2-4)x-2a_n{}^3+2-f(x)\}dx$$
$$=-\int_{a_n}^{a_{n+1}}(x-a_n)^2(x-a_{n+1})dx$$
$$=\int_{a_{n+1}}^{a_n}(x-a_n)^2(x-a_{n+1})dx$$

である。

以上，[1], [2]より，すべての自然数 n に対して，

$$S_n=\int_{a_{n+1}}^{a_n}(x-a_n)^2(x-a_{n+1})dx$$
$$=\int_{-2a_n}^{a_n}(x^3-3a_n{}^2x+2a_n{}^3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}a_n{}^2x^2+2a_n{}^3x\right]_{-2a_n}^{a_n}$$
$$=\left(\frac{1}{4}a_n{}^4-\frac{3}{2}a_n{}^4+2a_n{}^4\right)-(4a_n{}^4-6a_n{}^4-4a_n{}^4)$$
$$=\frac{27}{4}a_n{}^4$$
$$=27\cdot 2^{4n-6}\cdot a^4$$

である。

（答） $S_n=27\cdot 2^{4n-6}\cdot a^4$

(4)

$a=2$ のとき，$S_n=27\cdot 2^{4n-2}$ であるから，

$$S_n>10^{100}$$
$$\Leftrightarrow 27\cdot 2^{4n-2}>10^{100}$$

となる。ここで，両辺正であることに注意して，両辺の常用対数を取ると，底10は1よりも大きいから，

$$\log_{10}(27\cdot 2^{4n-2})>100$$
$$\Leftrightarrow \log_{10}3^3+\log_{10}2^{4n-2}>100$$
$$\Leftrightarrow 3\log_{10}3+(4n-2)\log_{10}2>100 \qquad \cdots ①$$

である。ここで，左辺は n について単調に増加する。$n=82$ のとき，

$\log_{10}2<0.302$, $\log_{10}3<0.478$ より，

$$3\log_{10}3+(4\cdot 82-2)\log_{10}2<3\cdot 0.478+326\cdot 0.302$$
$$=99.886$$

であり，①は満たさない。$n=83$ のとき，$0.301<\log_{10}2$, $0.477<\log_{10}3$ より，

$$3\log_{10}3+(4\cdot 83-2)\log_{10}2>3\cdot 0.477+330\cdot 0.301$$
$$=100.761$$

であり，①を満たす。したがって，①を満たす最小の自然数 n は $n=83$ である。

（答） $n=83$

〔Ⅲ〕

(1)

題意より，

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=1$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

が成り立つ。したがって，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+x\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

$$\Leftrightarrow1+\frac{1}{2}x=0$$

$$\therefore x=-2$$

である。

(答) $x=-2$

(2)

2 点 C, D は

$$\overrightarrow{OC}=-s\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OD}=-t\overrightarrow{OB}$$

をみたすから，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{CD}\right|^2&=\left|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\right|^2\\&=\left|-t\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=t^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-2st\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+s^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=s^2-st+t^2\end{aligned}$$

である。したがって，$\left|\overrightarrow{CD}\right|\geqq0$ であるから，

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{s^2-st+t^2}$$

となる。

(答) $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{s^2-st+t^2}$

(3)

$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}$ は 1 次独立であるから，実数 $k,\ l$ を用いて，

$$\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$$

とおく。このとき，線分 AC の中点を X とすると，E は線分 AC の垂直 2 等分線上の点であるから，

$$\overrightarrow{OX}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{1-s}{2}\overrightarrow{OA}$$

および

$$\overrightarrow{EX}\cdot\overrightarrow{OA}=0$$

が成り立つ。したがって，

$$\overrightarrow{EX}\cdot\overrightarrow{OA}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OE}\right)\cdot\overrightarrow{OA}=0$$

$$\Leftrightarrow\left\{\frac{1-s}{2}\overrightarrow{OA}-\left(k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}\right)\right\}\cdot\overrightarrow{OA}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-2k-s}{2}-\frac{l}{2}=0$$

$$\therefore 2k+l=1-s \qquad \cdots①$$

が得られる。同様にして，線分 BD の中点を Y とすると，E は線分 BD の垂直 2 等分線上の点であるから，

$$\overrightarrow{OY}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}{2}=\frac{1-t}{2}\overrightarrow{OB}$$

および

$$\overrightarrow{EY}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

が成り立つ。したがって，

$$\overrightarrow{EY}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OE}\right)\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

$$\Leftrightarrow\left\{\frac{1-t}{2}\overrightarrow{OB}-\left(k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}\right)\right\}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-2l-t}{2}-\frac{k}{2}=0$$

$$\therefore k+2l=1-t \qquad \cdots②$$

が得られる。①および②より，連立方程式を解くと，

$$(k,\ l)=\left(\frac{1-2s+t}{3},\ \frac{1+s-2t}{3}\right)$$

である。以上より，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1-2s+t}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1+s-2t}{3}\overrightarrow{OB}$$

である。

(答) $\overrightarrow{OE}=\dfrac{1-2s+t}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1+s-2t}{3}\overrightarrow{OB}$

(4)

$\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$ より $s^2-st+t^2=1$ である。このもとで，3 点 L, M, N が同一直線上にあることは，任意の正の実数 $s,\ t$ （$s\neq1$ または $t\neq1$）に対して，

$$\overrightarrow{LM}=m\overrightarrow{LN}$$

なる実数 m が存在することと同値である。ここで，L, M, N はそれぞれ線分 AD，線分 OE，線分 BC の中点であるから，

$$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{t}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{ON}=-\frac{s}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

が成り立つ。したがって，

$$\overrightarrow{LM}=m\overrightarrow{LN}$$

$$\Leftrightarrow\frac{-2-2s+t}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1+s+t}{6}\overrightarrow{OB}=m\left(\frac{-1-s}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1+t}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

であり，$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}$ は 1 次独立であるから，両辺の係数を比較すると，

3 点 L, M, N が同一直線上にある

$\Leftrightarrow$ 任意の正の実数 $s,\ t$ （$s\neq1$ または $t\neq1$）に対して，

$$\begin{cases}\dfrac{-2-2s+t}{6}=m\cdot\dfrac{-1-s}{2}\\[2mm]\dfrac{1+s+t}{6}=m\cdot\dfrac{1+t}{2}\end{cases}$$ を満たす実数 m が存在する $\cdots③$

である。ここで，③が成立するための必要十分条件は

$$\frac{-2-2s+t}{6}:\frac{1+s+t}{6}=\frac{-1-s}{2}:\frac{1+t}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{-2-2s+t}{6}:\frac{1+t}{2}=\frac{1+s+t}{6}:\frac{-1-s}{2}$$

$$\Leftrightarrow(-2-2s+t)(1+t)-(1+s+t)(-1-s)=0$$

である。したがって，$s^2-st+t^2=1$ のもとで，

$$\begin{aligned}&(-2-2s+t)(1+t)-(1+s+t)(-1-s)\\&=-2-2s+t-2t-2st+t^2+1+s+t+s+s^2+st\\&=s^2-st+t^2-1\\&=0\end{aligned}$$

であるから，3 点 L, M, N は同一直線上にあることが示された。

(証明終)

$s^2-st+t^2=1$ かつ $s=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，

$$t^2-\frac{1}{\sqrt{3}}t-\frac{2}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$$

$$\therefore t=\frac{2}{\sqrt{3}}\ (\because t>0)$$

である。このとき，③および $\overrightarrow{LM}=m\overrightarrow{LN}$ より，

$$\begin{aligned}\frac{LM}{LN}&=m\\&=\frac{1+s+t}{6}\cdot\frac{2}{1+t}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\\&=\frac{1}{3}\left(3-\sqrt{3}\right)\\&=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

である。

(答) $\dfrac{LM}{LN}=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$