理系数学　204

2024年度　入学試験問題

数　　学

注　意

(1)　**解答用紙**は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。

(2)　受験番号の記入欄は，解答用紙(一)，(二)のそれぞれ表面に2か所，裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。

(3)　氏名の記入欄は，解答用紙(一)，(二)の表面にそれぞれ1か所ある。合計2か所とも正確・明瞭に記入すること。

(4)　解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。

(5)　問題紙の本文は2ページである。

(6)　問題紙の余白は計算に使用してもよい。

(7)　問題紙を切り離して使用してはならない。

(8)　試験開始後，問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。

(9)　試験終了後，問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余白

〔 I 〕 次の $\boxed{}$ に適する数または式を，解答用紙の同じ記号のついた $\boxed{}$ の中に記入せよ．

(1) 円周を4等分する点を時計回りにA, B, C, Dとする．これら4点のいずれかに位置する動点Pに対して，「赤玉3個，白玉2個の合計5個の玉が入った袋から玉を1個取り出し，色を調べてからもとの袋に玉を戻す．玉の色が赤であれば動点Pを時計回りの隣の点に移動させ，白であれば動点Pを反時計回りの隣の点に移動させる」という試行を考える．n を自然数とし，最初に点Aに位置する動点Pに対してこの試行を n 回続けて行ったあと，動点Pが点A，Cに位置する確率をそれぞれ a_n, c_n とすると，$a_2 = \boxed{\text{ア}}$．k を自然数として，$n = 2k$ の場合を考える．このとき，$a_{2k} + c_{2k}$ の値は $\boxed{\text{イ}}$，a_{2k+2} を a_{2k} で表すと $a_{2k+2} = \boxed{\text{ウ}}\, a_{2k} + \dfrac{13}{25}$．よって，$a_{2k}$ を k で表すと $a_{2k} = \dfrac{1}{2}(1 + \boxed{\text{エ}})$ となり，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} c_{2k} = \boxed{\text{オ}}$．

(2) 複素数平面上で，点2を，原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を α とする．α の実部は $\boxed{\text{カ}}$，虚部は $\boxed{\text{キ}}$ である．次に，0でない複素数 z が，方程式 $|z-2| = |z-\alpha|$ を満たしながら変化するとき，$w = \dfrac{1}{z}$ で表される点 w が描く図形は，2つの点 $\dfrac{1}{2}$，β を結ぶ線分の垂直二等分線から原点を除いたものになる．ここで，β の実部は $\boxed{\text{ク}}$，虚部は $\boxed{\text{ケ}}$ である．また，$|z-w|^2$ の最小値は $\boxed{\text{コ}}$ である．

〔 II 〕 a を正の実数とする．座標平面上に，4点 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(a,0)$, $\mathrm{B}(a,9)$, $\mathrm{C}(0,9)$ を頂点とする四角形OABCと曲線 $H : y = e^x$ を考える．四角形OABCの面積を $D(a)$ とする．四角形OABCの周およびその内部からなる図形のうち，不等式 $y \leqq e^x$ の表す領域に含まれる部分の面積を $S(a)$ とする．関数 $f(a) = \dfrac{1}{2}D(a) - S(a)$ とする．次の問いに答えよ．ただし，自然対数の底 e について，$e < 3$ であることを証明なしに用いてよい．

(1) 点Bが曲線 H 上にあるときの a の値を a_0 とする．a_0 と $f(a_0)$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) (1)の a_0 に対し，区間 $0 < a \leqq a_0$ における $f(a)$ の符号を調べよ．

(3) $f(a) = 0$ となる a の値を求めよ．

〔 III 〕 n を自然数とする．自然数 k に対して関数 $f_k(x)$ を

$$f_k(x) = \frac{k}{n}\sin(kx) + \cos(kx)$$

で定め，$F_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} |f_k(x)|\,dx$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 三角関数の合成を用いると，$f_k(x) = C_k \sin(kx + \theta_k)$ と表される．このとき，C_k と $\tan\theta_k$ を k, n の式で表せ．ただし，$C_k > 0$ とする．

(2) F_k を k, n の式で表せ．ただし，c を実数，$g(x)$ を連続関数で 2π を周期とする周期関数とするとき，等式 $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x+c)\,dx = \int_0^{2\pi} g(x)\,dx$ が成り立つことを証明なしに用いてよい．

(3) 関数 $h(x) = x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ の導関数 $h'(x)$ について，$h'(x) = \alpha\sqrt{1+x^2}$ となる定数 α の値を求めよ．

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F_k$ を求めよ．

〔 IV 〕 a を正の定数，t を実数とする．点 O を原点とする座標空間内に，3 点 A$(2, 0, 0)$，B$(0, 2, 0)$，D(t, t, a) を考える．次の問いに答えよ．

(1) △ABD と △OAD の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．S_1，S_2 を a，t を用いて表せ．

(2) c を正の定数として，x の方程式 $\dfrac{x^2}{x^2+2c} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+1+c}$ を解け．

(3) 等式 $\sqrt{6+4\sqrt{2}} = m + \sqrt{2}$ を満たす整数 m を求めよ．ここで，2 つの整数 p，q が等式 $p + q\sqrt{2} = 0$ を満たせば，$p = q = 0$ であることを証明なしで用いてよい．

(4) $a = 128^{\frac{1}{4}}$ とする．t が実数全体を動くとき，四面体 OABD の表面積の最小値とそのときの t の値を求めよ．

以下余白