理系数学　207

2024年度　入学試験問題

数　　学

注　意

(1) **解答用紙**は(一)と(二)のそれぞれ１枚ずつである。

(2) 受験番号の記入欄は，解答用紙(一)，(二)のそれぞれ表面に２か所，裏面に１か所ある。合計６か所とも正確・明瞭に記入すること。

(3) 氏名の記入欄は，解答用紙(一)，(二)の表面にそれぞれ１か所ある。合計２か所とも正確・明瞭に記入すること。

(4) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。

(5) 問題紙の本文は２ページである。

(6) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。

(7) 問題紙を切り離して使用してはならない。

(8) 試験開始後，問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。

(9) 試験終了後，問題紙は各自持ち帰ること。

余白

余白

〔 I 〕 次の $\boxed{}$ に適する数または式を，解答用紙の同じ記号のついた $\boxed{}$ の中に記入せよ．

(1) じゃんけんにおいて，出た手が 2 種類の場合は勝者が決まり，そうでない場合はあいことする．じゃんけんをする人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする．n を 3 以上の自然数とする．n 人で 1 回目のじゃんけんをし，勝者が 1 人のときは 2 回目のじゃんけんをせず，勝者が 2 人以上のときは勝者のみで 2 回目のじゃんけんをする．1 回目のじゃんけんがあいこの場合は，n 人全員で 2 回目のじゃんけんをする．1 回目のじゃんけんの勝者が 1 人である確率を a_n とし，1 回目があいこである確率を b_n とする．また，2 回目のじゃんけんが行われ，かつ，その勝者が 1 人である確率を c_n とする．このとき，$a_3 = \boxed{\text{ア}}$，$c_3 = \boxed{\text{イ}}$ である．また，a_n，b_n を n の式で表すと，$a_n = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{3^{n-1}}$，$b_n = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{3^{n-1}}$ となり，$c_5 = \boxed{\text{オ}}$ となる．

(2) t を実数とし，z の 2 次方程式 $z^2 + (4t+6)z + 5t^2 + 12t + 32 = 0$ の解を虚部の大きい順に α，β とする．複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(t)$ が同一直線上にあるとき，$t = \boxed{\text{カ}}$ である．3 点 A，B，C が三角形をなすとき，その重心を表す複素数を w とする．このとき，w，$|\alpha - w|^2$ を t の式で表すと，$w = \boxed{\text{キ}}$，$|\alpha - w|^2 = \boxed{\text{ク}}$ となり，$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心と外心が一致する t の値は大きい順に $\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ である．

〔 II 〕 実数 α，β は $\alpha > \beta > 0$ を満たすとする．数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1 = \alpha,\ b_1 = \beta,\quad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n},\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．ただし，必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つことを証明なしに用いてよい．

(1) 実数 u は $0 < u < \dfrac{\pi}{4}$ を満たすとする．$\alpha = \tan(2u)$，$\beta = \sin(2u)$ のとき，$\dfrac{a_2}{\tan u}$，$\dfrac{b_2}{\sin u}$ はそれぞれ定数 A，B となる．A，B を求めよ．

(2) 実数 p, x はそれぞれ $p > 0$，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．$\alpha = p\tan x$，$\beta = p\sin x$ のとき，自然数 n に対して，$\dfrac{a_n}{\tan\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}$，$\dfrac{b_n}{\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}$ をそれぞれ p，n を用いて表せ．

(3) $\alpha = 2$，$\beta = 1$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ をそれぞれ求めよ．

〔 III 〕 a を定数として，xy 平面上で次の2つの曲線 C，D_a を考える．

$$C:\ y=\frac{\sqrt{3}}{6}(x-1)^2, \qquad D_a:\ \frac{(x-1)^2}{3}+(y-a)^2=1$$

次の問いに答えよ．

(1) 曲線 D_a 上の点 $\left(1-\sqrt{2},\ a-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ における曲線 D_a の接線の傾きを求めよ．

(2) $s>1$ とする．2つの曲線 C，D_a が共有点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ をもち，この共有点Pにおいて共通の接線をもつ．このとき，a，s，t の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a の値を k として，曲線 D_k の $y \leqq k$ の部分を曲線 E_k とする．2つの曲線 C と E_k で囲まれた部分を，直線 $y=k$ の周りに1回転させてできる立体の体積を V とする．V の値を求めよ．

〔 IV 〕 x を正の実数とする．$f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ とおく．また，$x \fallingdotseq \dfrac{2k-1}{2}\pi$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき，$g(x)=\tan x+\dfrac{3}{2x}$ とおく．p を正の実数とし，点 $(p,\ f(p))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線を ℓ_p とする．次の問いに答えよ．ただし，必要ならば，$\pi>3$ であることを証明なしに用いてよい．

(1) $f(x)$，$g(x)$ の導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) ℓ_p が原点 $(0,0)$ を通るとき，$g(p)$ の値を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，次の2つの条件 (i)，(ii) を同時に満たす実数 p_n がただ一つあることを示せ．

(i) $|p_n-\pi n|<\dfrac{\pi}{2}$ (ii) ℓ_{p_n} が原点 $(0,0)$ を通る

(4) 自然数 n に対して，(3) の p_n は $\pi n-\dfrac{1}{n}<p_n<\pi n$ を満たすことを示せ．ただし，必要ならば，$0 \leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\tan x \geqq x$ が成り立つことを証明なしに用いてよい．

(5) 自然数 m に対して，直線 $\ell_{p_{2m}}$ の傾きを α_m とおく．極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} m^{\frac{3}{2}}\alpha_m$ を求めよ．

以下余白