理系数学　201

2024年度　入学試験問題

数　　学

注　意

(1)　**解答用紙**は(一)と(二)のそれぞれ１枚ずつである。

(2)　受験番号の記入欄は，解答用紙(一)，(二)のそれぞれ表面に２か所，裏面に１か所ある。合計６か所とも正確・明瞭に記入すること。

(3)　氏名の記入欄は，解答用紙(一)，(二)の表面にそれぞれ１か所ある。合計２か所とも正確・明瞭に記入すること。

(4)　解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。

(5)　問題紙の本文は２ページである。

(6)　問題紙の余白は計算に使用してもよい。

(7)　問題紙を切り離して使用してはならない。

(8)　試験開始後，問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。

(9)　試験終了後，問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余白

〔 I 〕 次の $\boxed{}$ に適する数または式を，解答用紙の同じ記号のついた $\boxed{}$ の中に記入せよ．

(1) n を2以上の自然数とする．n 個のさいころを同時に投げるとき，出る目すべての積を4で割ったときの余りが0，1，2，3である確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とする．このとき，$b_2 + d_2 = \boxed{\text{ア}}$，$c_2 = \boxed{\text{イ}}$ である．一般に，$b_n + d_n$，c_n を n の式で表すと，$b_n + d_n = \boxed{\text{ウ}}$，$c_n = \boxed{\text{エ}}$．これらと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$ を用いると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1 - a_n) = \boxed{\text{オ}}$．

(2) i を虚数単位とする．実数 t に対して，複素数 z に関する方程式

$$|3z + it| = |(t + 2i)z - 1|$$

の解 z 全体が複素数平面上で表す図形を C_t とする．C_t が円でないのは $t^2 = \boxed{\text{カ}}$ のときである．C_t が円であるとき，その中心を表す複素数を w とし，w の偏角を θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ で表す．w の虚部が0となるのは $t = \boxed{\text{キ}}$ のときであり，このときの w の実部の値は $\boxed{\text{ク}}$ である．また，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\tan\theta = \boxed{\text{ケ}}$ であり，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}t|w| = \boxed{\text{コ}}$ である．

〔 II 〕 平面上の△OAB において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 3$ とし，辺 OA の中点を M とする．∠AOB の二等分線を k，∠AMB の二等分線を ℓ とし，k と ℓ の交点を P とする．$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{m} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$x = |\overrightarrow{\mathrm{BM}}|$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 直線 k と線分 BM の交点を C とする．実数 r，s が $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = r\vec{b} + s\vec{m}$ を満たすとき，r，s の値をそれぞれ求めよ．

(2) 直線 ℓ と線分 AB の交点を D とする．実数 t，u が $\overrightarrow{\mathrm{MD}} = t\vec{b} + u\vec{m}$ を満たすとき，t，u をそれぞれ x の式で表せ．

(3) 実数 y，z が $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = y\vec{b} + z\vec{m}$ を満たすとき，y，z をそれぞれ x の式で表せ．

(4) 面積比について，△OAP : △OAB = 2 : 3 が成り立つとする．このとき，x の値を求めよ．

201

〔 III 〕 p を実数とする．座標平面上の点 $\mathrm{P}\left(4p,\ -\sqrt{18p^2+2}\ \right)$ と放物線 $C : y = \dfrac{3}{8}x^2$ を考える．$\alpha < \beta$ である実数 α，β について，放物線 C 上の 2 点 $\mathrm{L}\left(\alpha,\ \dfrac{3}{8}\alpha^2\right)$，$\mathrm{M}\left(\beta,\ \dfrac{3}{8}\beta^2\right)$ における C の接線をそれぞれ ℓ，m としたとき，ℓ と m はともに点 P を通るとする．原点 O から直線 LM に下ろした垂線を OH とする．次の問いに答えよ．

(1) 実数 s に対して，C 上の点 $\left(s,\ \dfrac{3}{8}s^2\right)$ における C の接線を考える．この接線の傾きおよび y 切片をそれぞれ s を用いて表せ．

(2) $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を p の式で表せ．

(3) 直線 LM の傾きおよび y 切片をそれぞれ p を用いて表せ．また，線分 OH の長さを求めよ．

(4) p が $-\dfrac{1}{3} \leqq p \leqq \dfrac{1}{3}$ の範囲を動くとき，点 H の軌跡の長さを求めよ．

(5) p が (4) の範囲を動くとき，線分 HM が通過する領域の面積を求めよ．

〔 IV 〕 正の実数 x に対して $f(x) = \sin(\pi x^{\frac{1}{3}})$ とし，自然数 n に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ とする．次の問いに答えよ．ただし，必要ならば，$3 < \pi < 4$ であることを証明なしに用いてよい．

(1) 2 つの条件 $S_{n-1} = S_n$，$1000 \leqq n \leqq 27000$ を同時に満たす自然数 n の個数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int t^2 \sin t\, dt$ を求めよ．また，すべての自然数 m に対して次の等式が成り立つような定数 p，q，r の値を求めよ．

$$\int_1^{m^3} f(x)\, dx = (p\, m^2 + q)\cos(\pi m) + r$$

(3) 自然数 m に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\int_1^{m^3} f(x)\, dx - \pi(m-1) < S_{m^3} < \int_1^{m^3} f(x)\, dx + \pi(m-1)$$

ただし，必要ならば，自然数 k に対して，$k \leqq x \leqq k+1$ のとき，

$$f(x) - \frac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}} < f(k+1) < f(x) + \frac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

が成り立つことを証明なしに用いてよい．

(4) 3 つの条件 $S_{n-1} = S_n$，$S_n < 0$，$1000 \leqq n \leqq 27000$ を同時に満たす自然数 n の個数を求めよ．

(5) 2 つの条件 $S_{n-1} \leqq 0 < S_n$，$1000 \leqq n \leqq 27000$ を同時に満たす自然数 n の個数を求めよ．

以下余白