

【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$\frac{1}{9}$	$\frac{23}{45}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{1507}{19683}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	$230-\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	12	$-\sqrt{3}$	$3\sqrt{13}$

【解説】

(1)

袋 A を選ぶ確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ であり、袋 B を選ぶ確率は $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ である。最初、袋 A には白玉 2 個、赤玉 4 個が入っているから、1 回目の試行で袋 A から白玉を取り出す確率は、

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$$

である。また、最初、袋 B には白玉 3 個、赤玉 2 個が入っているから、1 回目の試行で袋 B から白玉を取り出す確率は、

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

である。したがって、1 回目の試行で白玉を取り出す確率は、これらを足し合わせて、

$$\frac{1}{9}+\frac{2}{5}=\frac{23}{45}$$

となる。同様に、1 回目の試行で袋 A から赤玉を取り出す確率は、

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{9}$$

であり、1 回目の試行で袋 B から赤玉を取り出す確率は、

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

である。したがって、1 回目の試行で取り出した玉が赤玉であるとき、選ばれた袋が A である条件付き確率は、

$$\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}+\frac{4}{15}}=\frac{5}{11}$$

となる。次に、2 回目の試行で赤玉を取り出す確率を、1 回目の試行で選ばれた袋の種類と取り出した玉の色で分けて考える。取り出した玉は袋に戻さないことに注意して、

$$1\text{ 回目の試行で袋 A から白玉を取り出す場合: }\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\right)=\frac{8}{135}$$

$$1\text{ 回目の試行で袋 B から白玉を取り出す場合: }\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\right)=\frac{2}{9}$$

$$1\text{ 回目の試行で袋 A から赤玉を取り出す場合: }\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\right)=\frac{14}{135}$$

$$1\text{ 回目の試行で袋 B から赤玉を取り出す場合: }\frac{4}{15}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{14}{135}$$

となる。したがって、2 回目の試行で取り出した玉が赤玉であるとき、1 回目の試行で取り出した玉も赤玉である条件付き確率は、

$$\frac{\frac{14}{135}+\frac{14}{135}}{\frac{8}{135}+\frac{2}{9}+\frac{14}{135}+\frac{14}{135}}=\frac{14}{33}$$

となる。次に、袋 B より先に袋 A の玉がすべてなくなったとき、袋 B が選ばれた回数を k 回とおく。最初、袋 B に入っている玉の数は 5 個であるから、 $k=0, 1, 2, 3, 4$ のいずれかである。また、袋 A が選ばれた回数は 6 回であるから試行回数は全部で $6+k$ 回であり、 $6+k$ 回目の試行では袋 A が選ばれる。よって、袋 B が選ばれた回数が k 回で、かつ袋 B より先に袋 A の玉がすべてなくなる確率は、 $5+k$ 回目までの玉の選び方を考えて、

$${}_{5+k}\text{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot\frac{1}{3}={}_{5+k}\text{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

と表されるから、袋 B より先に袋 A の玉がすべてなくなる確率は、

$$\begin{aligned}& \sum_{k=0}^4 {}_{5+k}\text{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^k \\&= {}_5\text{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^0+{}_6\text{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^1+{}_7\text{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_8\text{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_9\text{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^4 \\&=\frac{1}{3^6}+\frac{4}{3^6}+\frac{28}{3^7}+\frac{448}{3^9}+\frac{224}{3^8} \\&=\frac{1507}{19683}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\overline{OB}-\overline{OA} \\&=\left(2, 3\sqrt{3}+27, 3\sqrt{3}-26\right)-\left(6\sqrt{3}, 3\sqrt{3}-25, 3\sqrt{3}+26\right) \\&=\left(2-6\sqrt{3}, 52, -52\right)\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}|\overline{AB}|^2&=\left(2-6\sqrt{3}\right)^2+52^2+(-52)^2 \\&=5520-24\sqrt{3} \\&=24\times\left(230-\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}|\overline{OA}|^2&=\left(6\sqrt{3}\right)^2+\left(3\sqrt{3}-25\right)^2+\left(3\sqrt{3}+26\right)^2 \\&=1463+6\sqrt{3} \\|\overline{OB}|^2&=2^2+\left(3\sqrt{3}+27\right)^2+\left(3\sqrt{3}-26\right)^2 \\&=1463+6\sqrt{3}\end{aligned}$$

であるから、 $|\overline{OA}|=|\overline{OB}|$ が成り立つ。したがって、 $\triangle OAB$ は $OA=OB$ の二等辺三角形であり、

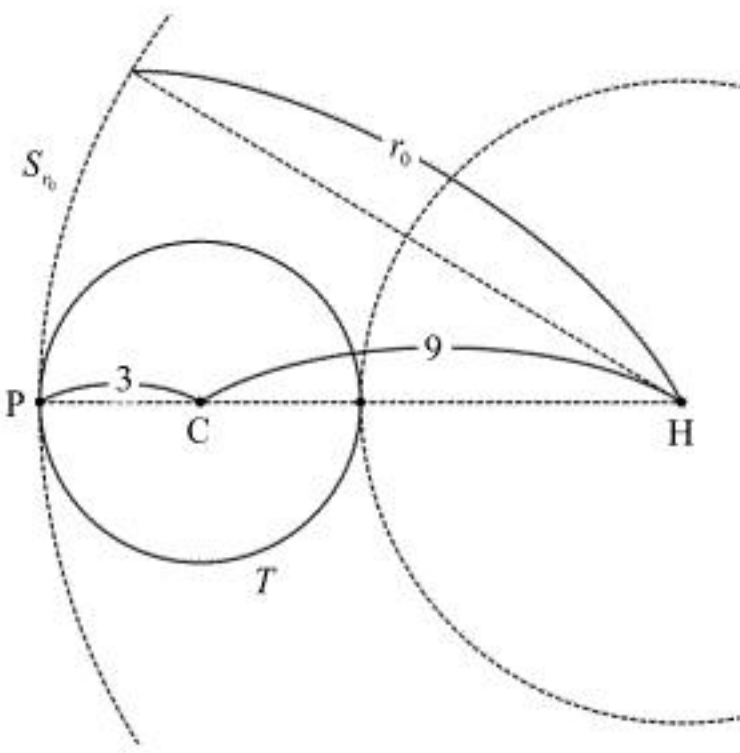
点 O から直線 AB ($=\ell$) に下ろした垂線の足 H は、線分 AB の中点に一致する。よって、

$$\begin{aligned}\overline{OH}&=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB}) \\&=\left(3\sqrt{3}+1, 3\sqrt{3}+1, 3\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

となるから、点 H の z 座標は $3\sqrt{3}$ である。次に、 $\overline{CH}=\left(3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$ より、

$$\begin{aligned}|\overline{CH}|^2&=\left(3\sqrt{3}\right)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2 \\&\Leftrightarrow |\overline{CH}|=9\end{aligned}$$

となるから、2 点 C, H を含む平面を図示すると次図のようになる。



前図より、2 つの球面 S_r, T が 1 点のみを共有するような r の値は 2 つ存在することがわかるが、 r が最大となるのは、 S_r, T が内接するときである。したがって、

$$\begin{aligned}r_0&=CH+CP \\&=12\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\overline{OP}&=\overline{OC}+\overline{CP} \\&=\overline{OC}-\frac{3}{9}\overline{CH} \\&=(1, 1, 0)-\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right) \\&=\left(1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

となるから、点 P の z 座標は $-\sqrt{3}$ である。 S_0 の半径は $r_0=12$ であり、 S_0 の中心である点 H

と xy 平面との距離は $3\sqrt{3}$ である。したがって、 S_0 が xy 平面と交わってできる円の半径は、

$$\sqrt{12^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}=3\sqrt{13}$$

である。

【Ⅱ】

(1)

数列 $\{a_n\}$ の漸化式より,

$$\begin{aligned} a_3 &= a_{1+1} + \frac{10 \cdot (9-1)}{(1+2) \cdot (1+1)} a_1 \\ &= a_2 + \frac{40}{3} a_1 \\ &= 1 + \frac{40}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{43}{3} \end{aligned}$$

となる。また, 数列 $\{b_n\}$ の定義より,

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{1+1} + \frac{9-1}{1+1} a_1 \\ &= a_2 + 4a_1 \\ &= 1 + 4 \cdot 1 \\ &= 5 \\ b_2 &= a_{2+1} + \frac{9-2}{2+1} a_2 \\ &= a_3 + \frac{7}{3} a_2 \\ &= \frac{43}{3} + \frac{7}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{50}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_3 = \frac{43}{3}, b_1 = 5, b_2 = \frac{50}{3}$

(2)

数列 $\{a_n\}$ の漸化式と数列 $\{b_n\}$ の定義より,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{(n+1)+1} + \frac{9-(n+1)}{(n+1)+1} a_{n+1} \\ &= a_{n+2} + \frac{8-n}{n+2} a_{n+1} \\ &= \left\{ a_{n+1} + \frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)} a_n \right\} + \frac{8-n}{n+2} a_{n+1} \\ &= \frac{10}{n+2} a_{n+1} + \frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)} a_n \\ &= \frac{10}{n+2} \left(a_{n+1} + \frac{9-n}{n+1} a_n \right) \\ &= \frac{10}{n+2} b_n \end{aligned}$$

となるため,

$$c_n = \frac{10}{n+2}$$

である。

(答) $c_n = \frac{10}{n+2}$

(3)

(2)より, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} b_n &= c_{n-1} b_{n-1} \\ &= c_{n-1} c_{n-2} b_{n-2} \\ &\vdots \\ &= c_{n-1} c_{n-2} \cdots c_2 c_1 b_1 \\ &= \frac{10}{n+1} \cdot \frac{10}{n} \cdots \frac{10}{4} \cdot \frac{10}{3} \cdot 5 \\ &= \frac{10}{n+1} \cdot \frac{10}{n} \cdots \frac{10}{4} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{10}{2} \\ &= \frac{10^n}{(n+1)!} \end{aligned}$$

となる。また,

$$\frac{10^1}{(1+1)!} = \frac{10}{2} = 5$$

より, $n=1$ のときも成り立つため, 求める一般項は,

$$b_n = \frac{10^n}{(n+1)!}$$

となる。

(答) $b_n = \frac{10^n}{(n+1)!}$

(4)

n を自然数とするととき, $a_n > 0$ であるため, 数列 $\{a_n\}$ の漸化式より,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &> a_{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)} a_n &> 0 \\ \Leftrightarrow n &< 9 \\ \therefore 1 \leq n &\leq 8 \\ a_{n+2} &= a_{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)} &= 0 \\ \therefore n &= 9 \\ a_{n+2} &< a_{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)} a_n &< 0 \\ \Leftrightarrow n &> 9 \\ \therefore n &\geq 10 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって, 関係式

$$a_1 = a_2 < \cdots < a_9 < a_{10} = a_{11} > a_{12} > a_{13} > \cdots$$

が成り立つため, すべての自然数 n について $a_n \leq a_{m_0}$ が成り立つような自然数 m_0 は,

$$m_0 = 10, 11$$

である。ここで, 数列 $\{b_n\}$ の定義より,

$$b_9 = a_{9+1} + \frac{9-9}{9+1} a_9 = a_{10}$$

となるため, (3)より,

$$\begin{aligned} (10!) \cdot a_{10} &= (10!) \cdot b_9 \\ &= (10!) \cdot \frac{10^9}{(9+1)!} \\ &= 10^9 \end{aligned}$$

である。また, $a_{11} = a_{10}$ より,

$$(10!) \cdot a_{11} = (10!) \cdot a_{10} = 10^9$$

であるため, 求める値の組は,

$$(m_0, (10!) \cdot a_{m_0}) = (10, 10^9), (11, 10^9)$$

である。

(答) $(m_0, (10!) \cdot a_{m_0}) = (10, 10^9), (11, 10^9)$

【Ⅲ】

(1)

半角の公式より、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x + \cos^2(x + \alpha) \\ &= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2(x + \alpha)}{2} \\ &= 1 + \frac{\cos 2(x + \alpha) - \cos 2x}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 + \frac{\cos 2(x + \alpha) - \cos 2x}{2} \right\} dx \\ &= \left[x + \frac{\sin 2(x + \alpha) - \sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi - \sin 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

であり、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - u^2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \frac{\pi - \sin 2\alpha}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{\pi}{2} - u\sqrt{1 - u^2} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2} - u\sqrt{1 - u^2}$$

(2)

(1)より、 $f(x) = 1 + \frac{\cos 2(x + \alpha) - \cos 2x}{2}$ について、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin 2(x + \alpha) + \sin 2x \\ &= -2\sin \alpha \cos(2x + \alpha) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $\alpha \leq 2x + \alpha \leq \pi + \alpha$ であり、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より

$\pi < \pi + \alpha < \frac{3}{2}\pi$ であるから、 $f'(x) = 0$ となるとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2\sin \alpha \cos(2x + \alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(2x + \alpha) &= 0 \quad (\because \sin \alpha > 0) \\ \Leftrightarrow 2x + \alpha &= \frac{\pi}{2} \\ \therefore x &= \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

である。以上より、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減は次表の通りである。

x	0	...	$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	(極小値)	$\nearrow$	

したがって、増減表より、この範囲において $f(x)$ は $x = x_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ で最小値

$$\begin{aligned} c &= f(x_0) \\ &= 1 + \frac{\cos 2(x_0 + \alpha) - \cos 2x_0}{2} \\ &= 1 + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2} \\ &= 1 - \sin \alpha \\ &= 1 - u \end{aligned}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad x_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \quad c = 1 - u$$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= \int_0^{x_0} \pi \{f(x) - c\}^2 dx + \int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}} \pi \{f(x) - c\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - c\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 + \frac{\cos 2(x + \alpha) - \cos 2x}{2} - (1 - \sin \alpha) \right\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-\sin(2x + \alpha) \sin \alpha + \sin \alpha\}^2 dx \\ &= \pi \sin^2 \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1 - \sin(2x + \alpha)\}^2 dx \\ &= \pi u^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1 - \sin(2x + \alpha)\}^2 dx \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{V_1 + V_2}{\pi u^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1 - 2\sin(2x + \alpha) + \sin^2(2x + \alpha)\} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - 2\sin(2x + \alpha) + \frac{1 - \cos 2(2x + \alpha)}{2} \right\} dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x + \cos(2x + \alpha) - \frac{\sin(4x + 2\alpha)}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{4}\pi - 2\cos \alpha \\ &= \frac{3}{4}\pi - 2\sqrt{1 - u^2} \quad (\because \cos \alpha = \sqrt{1 - u^2}) \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \frac{V_1 + V_2}{\pi u^2} = \frac{3}{4}\pi - 2\sqrt{1 - u^2}$$

【Ⅳ】

(1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(1+\sum_{k=1}^mt^k\over k!\right)&=\sum_{k=1}^mkt^{k-1}\over k!=\sum_{k=1}^mt^{k-1}\over (k-1)!より,\\[1ex]\frac{d}{dt}h(t)&=e^{-t}\cdot\frac{d}{dt}\left(1+\sum_{k=1}^mt^k\over k!\right)+\left(1+\sum_{k=1}^mt^k\over k!\right)\cdot\frac{d}{dt}e^{-t}\\&=e^{-t}\left\{\sum_{k=1}^mt^{k-1}\over (k-1)!-1-\sum_{k=1}^mt^k\over k!\right\}\\&=e^{-t}\left(\frac{t^0}{0!}-\frac{t^m}{m!}-1\right)\\&=-e^{-t}\frac{t^m}{m!}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答})\quad \frac{d}{dt}h(t)=-e^{-t}\frac{t^m}{m!}$$

(2)

$t^2=s$ とおくと、 $s\geqq 0$ となる。 $s\geqq 0$ において、

$$\frac{t^{2m}}{m!}<e^{t^2}\Leftrightarrow \frac{s^m}{m!}<e^s$$

が成立することを示す。(1)より $h(s)$ は $s\geqq 0$ において、単調減少より

$$\begin{aligned}h(s)&\leqq h(0)=1\\&\Leftrightarrow \left(1+\sum_{k=1}^m\frac{s^k}{k!}\right)e^{-s}\leqq 1\\&\Leftrightarrow 1+\sum_{k=1}^m\frac{s^k}{k!}\leqq e^s\end{aligned}$$

が成立する。 $s\geqq 0$ において、 $\sum_{k=1}^ms^k\over k!$ の各項は正より $\frac{s^m}{m!}<\sum_{k=1}^ms^k\over k!$ となる。以上より、

$$e^s\geqq 1+\sum_{k=1}^m\frac{s^k}{k!}>\frac{s^m}{m!}$$

が示された。

(証明終)

(3)

$$\ell_n(u)=f_n(e^u)\cdot e^{u^2}より,$$

$$\begin{aligned}\ell_0(u)&=f_0(e^u)\cdot e^{u^2}\\&=(e^u)^{-\log e^u}\cdot e^{u^2}\\&=e^{-u^2}\cdot e^{u^2}\\&=1\end{aligned}$$

となる。ここで、 $x=e^u\Leftrightarrow u=\log x$ より

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}=\frac{1}{e^u}$$

であり、

$$\begin{aligned}f_n(e^u)&=e^u\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{d}{du}f_{n-1}(e^u)\\&=e^u\cdot\frac{1}{e^u}\frac{d}{du}f_{n-1}(e^u)\\&=\frac{d}{du}f_{n-1}(e^u)\end{aligned}$$

となる。よって、 $f_0(e^u)=e^{-u^2}$ より

$$f_1(e^u)=\frac{d}{du}e^{-u^2}=-2ue^{-u^2}$$

が成り立つ。以上より、

$$\begin{aligned}\ell_1(u)&=f_1(e^u)\cdot e^{u^2}\\&=-2ue^{-u^2}\cdot e^{u^2}\\&=-2u\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\ell_{n+1}(u)&=f_{n+1}(e^u)\cdot e^{u^2}\\&=e^{u^2}\cdot\frac{d}{du}f_n(e^u)\\&=e^{u^2}\left\{\frac{d}{du}\ell_n(u)e^{-u^2}\right\}\\&=e^{u^2}\left\{\frac{d}{du}\ell_n(u)+(-2u\ell_n(u))\right\}e^{-u^2}\\&=-2u\cdot\ell_n(u)+\frac{d}{du}\ell_n(u)\end{aligned}$$

が成立する。数学的帰納法を利用して、 $n\geqq 1$ のとき $\ell_n(u)$ が u の n 次式であり、 u^n の係数が

$(-2)^n$ となることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\ell_1(u)=-2uより\ell_1(u)がuの1次式であり、uの係数が-2となる。$$

[2] $n=k$ (k は自然数)のとき

$$\ell_k(u)がuのk次式であり、u^kの係数が(-2)^kとなるとする。よって、-2u\cdot\ell_n(u)はuの$$

$$(k+1)次式、\frac{d}{du}\ell_k(u)はuの(k-1)次式であるので、\ell_{k+1}(u)はuの(k+1)次式となる。また、$$

$$\text{与えられた漸化式から}u^{k+1}\text{の係数は}$$

$$(-2)\cdot(-2)^k=(-2)^{k+1}$$

$$\text{となり、}n=k+1\text{のときも成立する。}$$

[1], [2]より、 $n\geqq 1$ のとき $\ell_n(u)$ が u の n 次式である。

(証明終)

また、[1], [2]より、 $n\geqq 1$ のとき u^n の係数が $(-2)^n$ となる。

$$(\text{答})\quad \ell_0(u)=1, \ell_1(u)=-2u, \; u^n\text{の項の係数：}(-2)^n$$

(4)

$x=e^u$ と置換すると $dx=e^u du$ であり、取りうる値の範囲は下表のようになる。

$$\begin{array}{c|ccc}x&&&\\ \hline u&\frac{1}{b}&\rightarrow&b\\ \hline &-\log b&\rightarrow&\log b\end{array}$$

よって、

$$\begin{aligned}I_n&=\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{\frac{1}{b}}^b\left\{f_n(x)\right\}^2x^{\log x-1}dx\\&=\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{-\log b}^{\log b}\left\{f_n(e^u)\right\}^2\cdot e^{u^2-u}\cdot e^u du\\&=\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{-\log b}^{\log b}\left\{f_n(e^u)\right\}^2\cdot e^{u^2} du\end{aligned}$$

となる。したがって、 $f_0(e^u)=e^{-u^2}$ より

$$\begin{aligned}I_0&=\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{-\log b}^{\log b}\left(e^{-u^2}\right)^2\cdot e^{u^2} du\\&=\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{-\log b}^{\log b}e^{-u^2} du\\&=2\lim_{b\rightarrow\infty}\int_0^{\log b}e^{-u^2} du\\&=\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

となる。また、 $f_1(e^u)=-2ue^{-u^2}$ より

$$\begin{aligned}I_1&=\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{-\log b}^{\log b}\left(-2ue^{-u^2}\right)^2\cdot e^{u^2} du\\&=4\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{-\log b}^{\log b}u\cdot\left(ue^{-u^2}\right) du\\&=4\lim_{b\rightarrow\infty}\left\{\left[u\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-u^2}\right)\right]_{-\log b}^{\log b}+\frac{1}{2}\int_{-\log b}^{\log b}e^{-u^2} du\right\}\\&=-4\lim_{b\rightarrow\infty}(\log b)\cdot e^{-(\log b)^2}+2\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

となる。ここで、(2)より $\frac{u^{2m}}{m!}<e^{u^2}$ に $m=1, u=\log b$ を代入して、

$$0<\left|(\log b)\cdot e^{-(\log b)^2}\right|<\left|(\log b)\cdot\frac{1}{(\log b)^2}\right|=\left|\frac{1}{(\log b)}\right|$$

となる。 $\lim_{b\rightarrow\infty}\left|\frac{1}{\log b}\right|=0$ よりはさみうちの原理から $\lim_{b\rightarrow\infty}(\log b)\cdot e^{-(\log b)^2}=0$ となる。したがって、

$$I_1=-4\cdot 0+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}$$

となる。

$$(\text{答})\quad I_0=\sqrt{\pi}, I_1=2\sqrt{\pi}$$

(5)

(2)より $\frac{u^{2m}}{m!}<e^{u^2}$ に $u=\log b$ を代入して、 n を 0 以上の整数として

$$\begin{aligned}0<\left|u^ne^{-u^2}\right|&<\left|u^n\cdot\frac{m!}{u^{2m}}\right|\\&\Leftrightarrow 0<\left|(\log b)^n\cdot e^{-(\log b)^2}\right|<\left|\frac{m!}{(\log b)^{2m-n}}\right|\end{aligned}$$

となる。ただし、 $m>\frac{n}{2}$ を満たすとする。このとき、 $\lim_{b\rightarrow\infty}\left|\frac{m!}{(\log b)^{2m-n}}\right|=0$ よりはさみうちの原

理から 0 以上の整数 n に対して、

$$\begin{aligned}\lim_{b\rightarrow\infty}\left|(\log b)^n\cdot e^{-(\log b)^2}\right|&=0\\&\therefore\lim_{b\rightarrow\infty}\left[u^ne^{-u^2}\right]_{-\log b}^{\log b}=0\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}I_n&=\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{-\log b}^{\log b}\left\{f_n(e^u)\right\}^2\cdot e^{u^2} du\\&=\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{-\log b}^{\log b}\ell_n(u)\cdot\left(\frac{d}{du}f_{n-1}(e^u)\right)du\left(\because\ell_n(u)=f_n(e^u)\cdot e^{u^2}, f_n(e^u)=\frac{d}{du}f_{n-1}(e^u)\right)\\&=\lim_{b\rightarrow\infty}\left\{\left[\ell_n(u)f_{n-1}(e^u)\right]_{-\log b}^{\log b}-\int_{-\log b}^{\log b}\left(\frac{d}{du}\ell_n(u)\right)\cdot f_{n-1}(e^u)du\right\}\\&=\lim_{b\rightarrow\infty}\left\{\left[\ell_n(u)\ell_{n-1}(u)e^{-u^2}\right]_{-\log b}^{\log b}-\int_{-\log b}^{\log b}\left(\frac{d}{du}\ell_n(u)\right)\left(\frac{d}{du}f_{n-2}(e^u)\right)du\right\}\\&=-\lim_{b\rightarrow\infty}\left\{\left[\left(\frac{d}{du}\ell_n(u)\right)\cdot f_{n-2}(e^u)\right]_{-\log b}^{\log b}-\int_{-\log b}^{\log b}\left(\frac{d^2}{du^2}\ell_n(u)\right)f_{n-2}(e^u)du\right\}\\&=-\lim_{b\rightarrow\infty}\left[\left[\left(\frac{d}{du}\ell_n(u)\right)\cdot\ell_{n-2}(u)e^{-u^2}\right]_{-\log b}^{\log b}-\int_{-\log b}^{\log b}\left(\frac{d^2}{du^2}\ell_n(u)\right)\left(\frac{d}{du}f_{n-3}(e^u)\right)du\right]\\&=(-1)^2\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{-\log b}^{\log b}\left(\frac{d^2}{du^2}\ell_n(u)\right)\left(\frac{d}{du}f_{n-3}(e^u)\right)du\end{aligned}$$

が成り立つ。以下、同様にして、

$$\begin{aligned}I_n&=(-1)^n\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{-\log b}^{\log b}\left(\frac{d^n}{du^n}\ell_n(u)\right)\cdot f_0(e^u)du\\&=(-1)^n\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{-\log b}^{\log b}\left(\frac{d^n}{du^n}\ell_n(u)\right)\cdot e^{-u^2} du\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\ell_n(u)$ が u の n 次式であり、 u^n の係数が $(-2)^n$ より

$$\frac{d^nu^n}{du^n}\ell_n(u)=(-2)^n\cdot n!$$

となる。したがって、

$$I_n=2^n\cdot n!\cdot\lim_{b\rightarrow\infty}\int_{-\log b}^{\log b}e^{-u^2} du=2^n\cdot n!\cdot\sqrt{\pi}$$

となる。

$$(\text{答})\quad I_n=2^n\cdot n!\cdot\sqrt{\pi}$$