

〔 I 〕

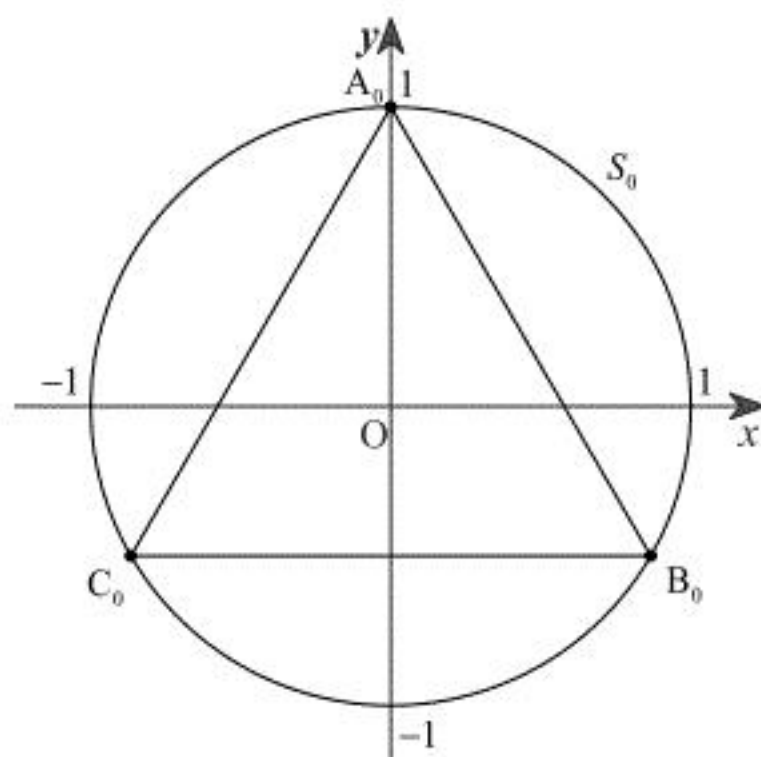
〔解答〕

(1)	ア	イ				
	6	35				
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	$x^2 + 4$	16	$x^4 - 4x^2 + 16$	-64	4^n	$(-4)^n$
(3)	ケ	コ				
	62	$\frac{2}{5}s^2 + \frac{3}{5}t^2 + 96$				

〔Ⅱ〕

(1)

$\triangle A_0B_0C_0$ を図示すると以下になる。



$\triangle A_0B_0C_0$ において正弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{B_0C_0}{\sin \frac{\pi}{3}} &= 2 \cdot 1 \\ \Leftrightarrow B_0C_0 &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。点 B_0 と点 C_0 は y 軸に関して線対称であるから、点 B_0 の x 座標は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、点 B_0

は S_0 上にあるから、点 B_0 の座標は $B_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad B_0C_0 = \sqrt{3}, B_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

(2)

円 S_1 の中心は $\triangle A_0B_0C_0$ の内心 $O(0,0)$ である。また円 S_1 の半径を r_1 として、 $\triangle A_0B_0C_0$ の面積を 2 通りで表して比較すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot (A_0B_0 + B_0C_0 + C_0A_0) \cdot r_1 &= \frac{1}{2} \cdot A_0B_0 \cdot B_0C_0 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot r_1 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow r_1 &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{円 } S_1 \text{ の中心の座標: } O(0,0), \text{ 半径: } r_1 = \frac{1}{2}$$

(3)

$\triangle A_nB_nC_n$ の 1 辺の長さを l_n とする。円 S_n は $\triangle A_nB_nC_n$ の外接円であるから、 $\triangle A_nB_nC_n$ において正弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{l_n}{\sin \frac{\pi}{3}} &= 2r_n \\ \Leftrightarrow l_n &= \sqrt{3}r_n\end{aligned}$$

となる。また円 S_{n+1} は $\triangle A_nB_nC_n$ の内接円であるから、 $\triangle A_nB_nC_n$ の面積を 2 通りで表して比較すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot (A_nB_n + B_nC_n + C_nA_n) \cdot r_{n+1} &= \frac{1}{2} \cdot A_nB_n \cdot B_nC_n \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{2} \cdot 3l_n \cdot r_{n+1} &= \frac{1}{2} \cdot l_n^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow r_{n+1} &= \frac{\sqrt{3}}{6}l_n\end{aligned}$$

であるから、

$$r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3}r_n = \frac{1}{2}r_n$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$$

(4)

円 S_n の中心が $O(0,0)$ であることを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

(2)より、円 S_1 の中心は $O(0,0)$ である。

[2] $n=k$ のとき

円 S_k の中心が $O(0,0)$ であると仮定すると、 O は $\triangle A_kB_kC_k$ の外心かつ内心である。また

円 S_{k+1} は $\triangle A_kB_kC_k$ の内接円であるから、その中心は $\triangle A_kB_kC_k$ の内心 $O(0,0)$ である。

以上[1], [2]より、円 S_n の中心が $O(0,0)$ であることが数学的帰納法により示された。また(3)の結果と $r_0=1$ より、円 S_n の半径は

$$\begin{aligned}r_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot r_0 \\ &= \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

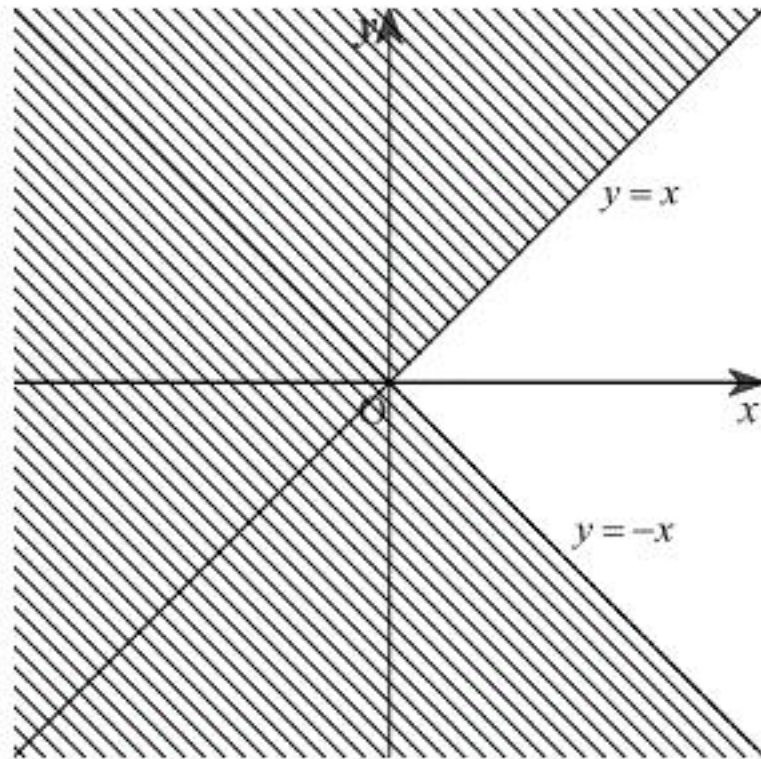
である。

$$(\text{答}) \quad \text{円 } S_n \text{ の中心の座標: } O(0,0), \text{ 半径: } r_n = \frac{1}{2^n}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$x \leq |y|$ は、 $y \geq 0$ のとき $x \leq y$ であり、 $y \leq 0$ のとき $x \leq -y$ であるから、不等式 $x \leq |y|$ の表す領域を xy 平面に図示すると以下ようになる。ただし境界線を含む。

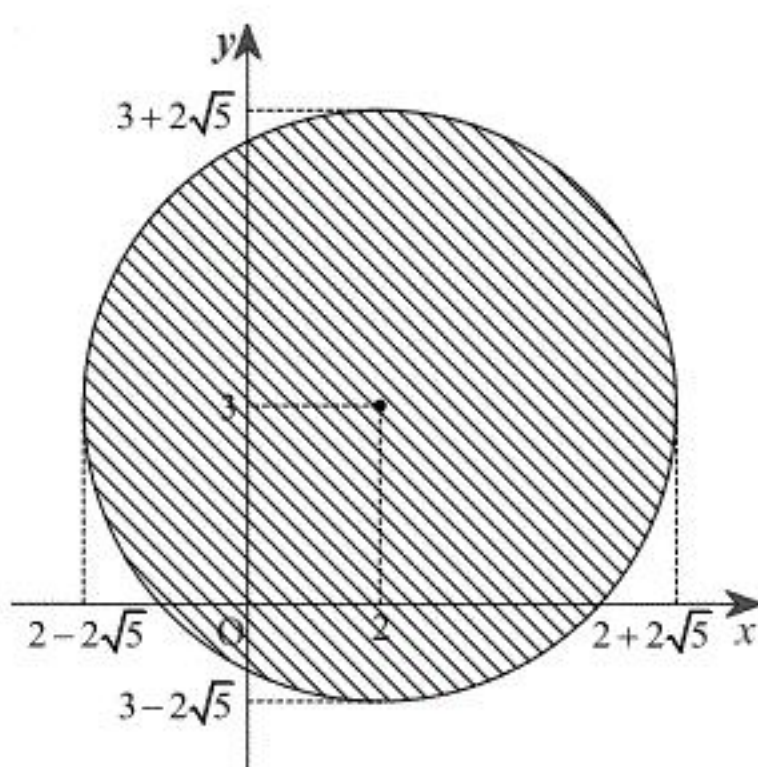


(答) 上表

(2)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 7 + 4x + 6y \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 &\leq 7 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 &\leq 20 \end{aligned}$$

であるから、不等式 $x^2 + y^2 \leq 7 + 4x + 6y$ の表す領域を xy 平面に図示すると以下ようになる。ただし境界線を含む。



(答) 上図

(3)

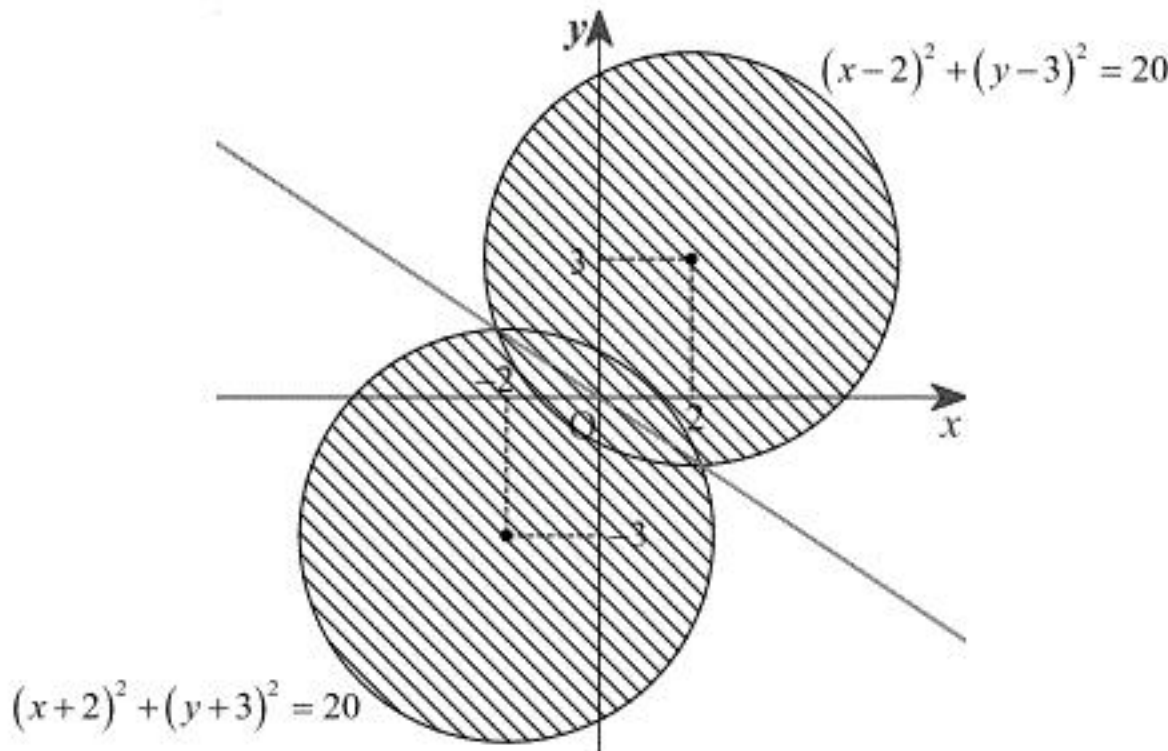
領域 $D_1: x^2 + y^2 + 13 \leq 20 + |4x + 6y|$ は、(2)の計算より領域 G_1

$$G_1: \begin{cases} 4x + 6y \geq 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 20 \end{cases}$$

と領域 G_2

$$G_2: \begin{cases} 4x + 6y < 0 \\ (x+2)^2 + (y+3)^2 \leq 20 \end{cases}$$

を合わせた領域となる。よって領域 D_1 を図示すると以下ようになる。ただし境界線を含む。



(答) 上図

(4)

領域 $D_t: x^2 + y^2 + 4t^2 + \frac{9}{t^2} \leq 20 + \left| 4tx + \frac{6}{t}y \right|$ は、領域 H_1

$$H_1: \begin{cases} 4tx + \frac{6}{t}y \geq 0 \\ (x-2t)^2 + \left(y - \frac{3}{t}\right)^2 \leq 20 \end{cases}$$

と領域 H_2

$$H_2: \begin{cases} 4tx + \frac{6}{t}y < 0 \\ (x+2t)^2 + \left(y + \frac{3}{t}\right)^2 \leq 20 \end{cases}$$

を合わせた領域となる。 $S(t)$ が最大となるのは、2つの領域 H_1, H_2 が外接する場合、または共有点を持たない場合である。領域 H_1, H_2 はともに半径が $2\sqrt{5}$ の円であるから、 $S(t)$ の最大値は

$$(2\sqrt{5})^2 \pi \cdot 2 = 40\pi$$

である。また領域 H_1 の中心と領域 H_2 の中心の間の距離が $4\sqrt{5}$ 以上のとき、 $S(t)$ は最大となるから、求める t の範囲は

$$\begin{aligned} \sqrt{\left\{2t - (-2t)\right\}^2 + \left\{\frac{3}{t} - \left(-\frac{3}{t}\right)\right\}^2} &\geq 4\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow 16t^2 + \frac{36}{t^2} &\geq 80 \\ \Leftrightarrow 4t^4 - 20t^2 + 9 &\geq 0 \quad (\because t > 0) \\ \Leftrightarrow (2t^2 - 1)(2t^2 - 9) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow t^2 &\leq \frac{1}{2}, \frac{9}{2} \leq t^2 \\ \Leftrightarrow 0 \leq t &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \leq t \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

である。

(答) $S(t)$ の最大値: 40π , t の範囲: $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \leq t$

(5)

領域 H_1 の中心と領域 H_2 の中心の間の距離が最小のとき $S(t)$ は最小となる。(4)より2点間の

距離は $2\sqrt{4t^2 + \frac{9}{t^2}}$ であり、 $4t^2 > 0, \frac{9}{t^2} > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} 2\sqrt{4t^2 + \frac{9}{t^2}} &\geq 2\sqrt{2\sqrt{4t^2} \cdot \frac{9}{t^2}} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。等号が成立するのは、

$$\begin{aligned} 4t^2 &= \frac{9}{t^2} \\ \Leftrightarrow t &= \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

のときであるから、 $S(t)$ が最小となるとき $t = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ である。

(答) $t = \frac{\sqrt{6}}{2}$