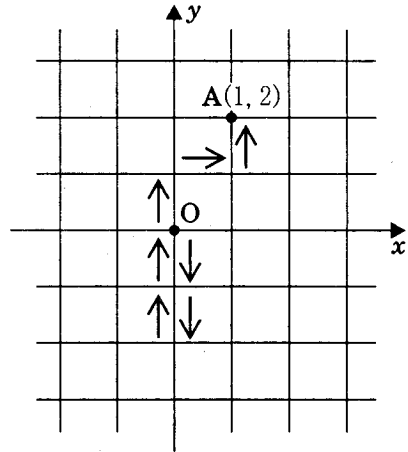


xy 平面上の点のうち、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。
 今、原点より、次の4つの移動(基本移動という)E, W, S, N をくり返すこと
 によって、点A(1, 2)まで移動することを考える。

E, W, S, N は、格子点 (p, q) より、それぞれ、 $(p+1, q)$,
 $(p-1, q)$, $(p, q-1)$, $(p, q+1)$ への移動を表す。

原点から点Aまでの一つの移動に際して、実施された基本移動をその実施順に
 並べたものをこの移動の“経路”，その実施回数をこの経路の“道のり”という。ま
 た、一つの経路にあらわれる基本移動 E, W, S, N の個数を、それぞれ、 e ,
 w , s , n とする。(2つの経路は、道のり
 が同じで基本移動の並びが同一のとき
 のみ、同じ経路とみなされる。)

例えば、右の図の矢印は、原点から、順
 にS, S, N, N, N, E, Nと基本移動を
 くり返すことによる点Aまでの移動を示
 しているが、この移動では、経路は
 SSNNNENであり、道のりは7, $e=1$,
 $w=0$, $s=2$, $n=4$ である。



- (1) 道のりが7となる経路における e と n が満たすべき条件を求めよ。
- (2) 道のりが7となる経路の総数を求めよ。

2

関数 $f(x) = ax^3 + (7 - a^2)x^2 + bx + c$ は、 $x = -1$ で極小値を、 $x = 2$ で極大値をとり、極小値の絶対値の2倍が極大値に等しい。定数 a 、 b 、 c を求めよ。

3

p を正の定数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = p,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

次の問いに答えよ。

(1) $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2}$ とおくとき、 b_{n+1} を b_n で表せ。

(2) b_n を n と b_1 で表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

a を 0 でない実数とする。 x の関数

$$f(x) = (x^2 + a^2) \sin(\pi x) - \int_{-x}^x (t - a) \sin(\pi t) dt$$

について次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{d}{dx} f(x)$ を求めよ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフは a の値によらない定点を通る。その定点の座標をすべて求めよ。
- (3) すべての整数 m に対し、 $y = f(x)$ のグラフは、区間 $m < x < m + 1$ において x 軸との共有点をただ 1 つもつことを証明せよ。

5 (選択問題)

5 — **a** , **5** — **b** のいずれか一方を選択して解答すること。選択した問題の記号(a または b)を解答用紙の所定の箇所に記入すること。

5 — **a**

等式

$$3x^2 + y^2 + 5z^2 - 2yz - 12 = 0$$

を満たす整数の組 (x, y, z) をすべて求めよ。

5 — **b**

a, b を $a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0, b \neq 1$ を満たす実数とする。

数列 $\{u_n\}$ を

$$u_1 = 1,$$

$$u_{n+1} = au_n + b^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

(1) 一般項 u_n を推定し、その推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) $\sum_{k=1}^n u_k$ を求めよ。

6

(選択問題)

6 — **a** , **6** — **b** のいずれか一方を選択して解答すること。選択した問題の記号(aまたはb)を解答用紙の所定の箇所に記入すること。

6 — **a**

A, B, C, Dを平面上の相異なる4点とする。

(1) 同じ平面上の点Pが

$$(*) \quad |\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}|^2 = |\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}|^2$$

を満たすとき, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$ の内積を求めよ。

(2) $(*)$ を満たす点Pの軌跡はどのような図形か。

(3) (2)で求めた図形が1点のみからなるとき, 四角形ACBDは平行四辺形であることを示せ。

6 — b

複素数 z と複素数 w の間に

$$w = \frac{z + \alpha}{z + i\alpha}$$

なる関係がある。ただし、 α は $|\alpha| = 1$ となる複素数の定数、 i は虚数単位である。

(1) $w = 2 - i$ のとき、 z は正の実数であるとする。 α を求めよ。

(2) $\alpha = i$ とする。 w が

$$\frac{2}{9} \leq \left| w - \frac{1}{3}(4 + i) \right|^2 \leq \frac{8}{9}$$

を満たすとき、 z の表す点が動く範囲を複素数平面上に図示せよ。