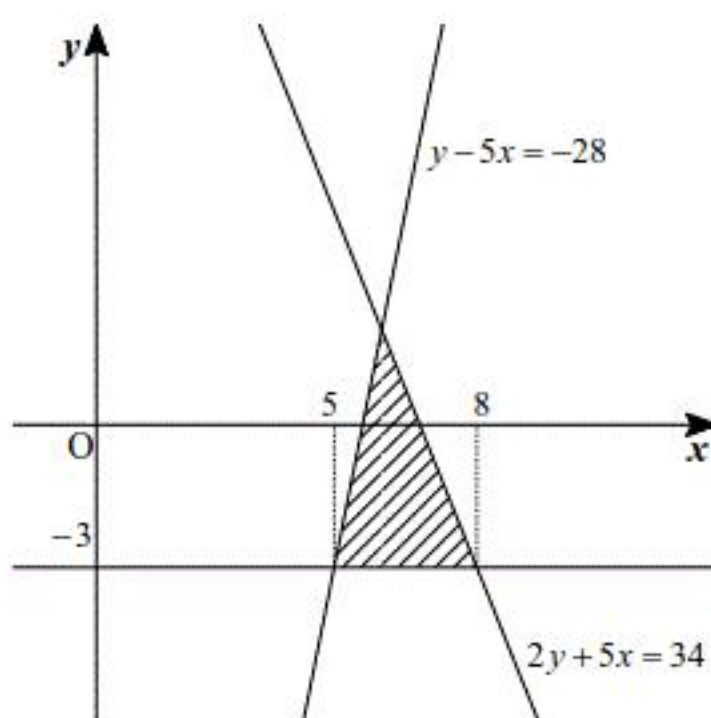


(1)

領域 A は下図の斜線部分(境界はすべて含む)である。



(答) 前図

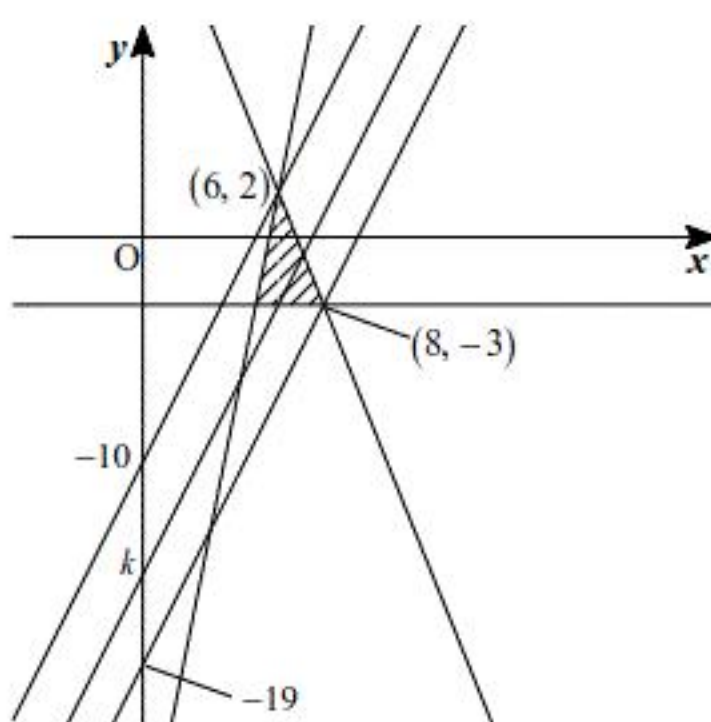
(2)

$y - 2x = k$ とおく。直線 $y = 2x + k$ が領域 A と共有点をもつような y 切片 k のとりうる値の範囲を考えればよい。直線の傾きの大小を考慮すると下図のようになり、 k は、

点 $(6, 2)$ を通るとき、最大値 -10

点 $(8, -3)$ を通るとき、最小値 -19

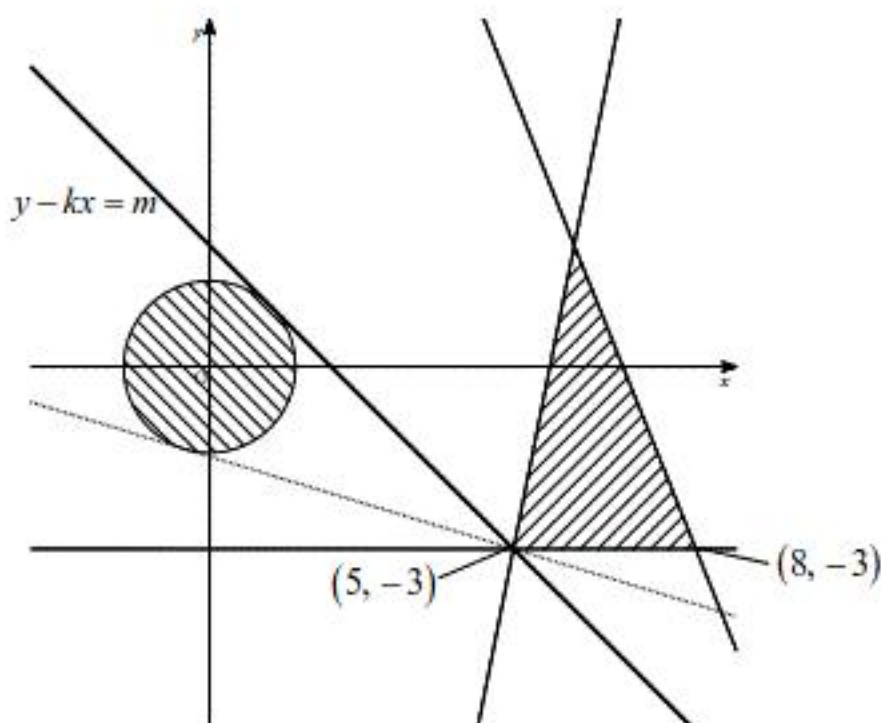
をとる。

(答) 点 $(6, 2)$ を通るとき、最大値 -10

点 $(8, -3)$ を通るとき、最小値 -19

(3)

下の図より、 $k \geq 0$ のとき、点 (x, y) が領域 A を動くときの $y - kx$ の最小値は点 $(8, -3)$ によって与えられるが、直線 $y - kx = m$ が領域 B を通ることではない。したがって、 $k < 0$ の場合を考えればよく、このとき、点 (x, y) が領域 A を動くときの $y - kx$ の最小値を与える点は $(5, -3)$ である。すなわち、直線 $y - kx = m$ が下図の太線になっていれば問題の条件を満たす。



点 $(5, -3)$ を通ることから、

$$m = -3 - 5k \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、また、円 $x^2 + y^2 = 2$ に接することから、中心である原点から直線 $y - kx = m$ の距離が円の半径 $\sqrt{2}$ に等しく、

$$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①を②に代入して

$$|3 + 5k| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+k^2}$$

となり、両辺正であるから、両辺を 2 乗しても同値であることに注意すると、

$$\begin{aligned} (3+5k)^2 &= 2(1+k^2) \\ \Leftrightarrow 23k^2 + 30k + 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow (23k+7)(k+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{7}{23}, -1 \end{aligned}$$

と求まる。ここで、 $k = -\frac{7}{23}$ のとき、直線 $y - kx = m$ は点線のようになっていて、問題の条件を満たさない。求める答は

$$(k, m) = (-1, 2)$$

となる。

(答) $(k, m) = (-1, 2)$

(1)

 $\vec{a}$ と $\vec{a} + t\vec{b}$ のなす角を θ_1 ($0 \leq \theta_1 \leq \pi$) $\vec{b}$ と $\vec{a} + t\vec{b}$ のなす角を θ_2 ($0 \leq \theta_2 \leq \pi$)とする。関数 $y = \cos \theta$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ において単調減少であるから、

$$\theta_1 = \theta_2 \Leftrightarrow \cos \theta_1 = \cos \theta_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないことから、 $\vec{a} + t\vec{b} \neq \vec{0}$ であり、したがって、

$$\cos \theta_1 = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + t\vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{a} + t\vec{b}|}, \cos \theta_2 = \frac{\vec{b} \cdot (\vec{a} + t\vec{b})}{|\vec{b}| |\vec{a} + t\vec{b}|} \quad \dots \textcircled{2}$$

とかける。 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、

$$\frac{1}{|\vec{a}|} (|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{|\vec{b}|} (\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} (16 + t\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{3} (\vec{a} \cdot \vec{b} + 9t)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{t}{4} - \frac{1}{3} \right) \vec{a} \cdot \vec{b} + (4 - 3t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \left(t - \frac{4}{3} \right) (\vec{a} \cdot \vec{b} - 12) = 0$$

となる。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とおくと、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないことから $0^\circ < \theta < 180^\circ$ となるため、

$$-|\vec{a}| |\vec{b}| < |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta < |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\Leftrightarrow -12 < \vec{a} \cdot \vec{b} < 12 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。したがって、 $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 12$ より

$$t = \frac{4}{3}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{4}{3}$$

(2)

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$

$$= 4(13 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \dots \textcircled{4}$$

である。したがって、 $\textcircled{3}$ より、

$$4 \cdot (13 - 12) < |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 < 4 \cdot (13 + 12)$$

$$\therefore 2 < |\vec{a} - 2\vec{b}| < 10$$

と求まる。また、 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 4$ のとき、 $\textcircled{4}$ より

$$4(13 - \vec{a} \cdot \vec{b}) = 16$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 9$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2 < |\vec{a} - 2\vec{b}| < 10$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$$

(1)

$$f'(x) = 2x \text{ より,}$$

$$l_p: y = f'(p)(x-p) + f(p) \Leftrightarrow y = 2px - p^2 + 2$$

$$l_q: y = 2qx - q^2 + 2$$

である。 l_p, l_q の交点の x 座標が r であるから、

$$2pr - p^2 + 2 = 2qr - q^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2(p-q)r - (p^2 - q^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (p-q)\{2r - (p+q)\} = 0$$

となり、ここで、 $p-q \neq 0$ より

$$p+q = 2r$$

となる。

このとき、 y 座標は、 $2p \cdot \frac{p+q}{2} - p^2 + 2 = pq + 2$ であるから、

$$pq + 2 = f(r) = \frac{1}{2}(r-1)^2$$

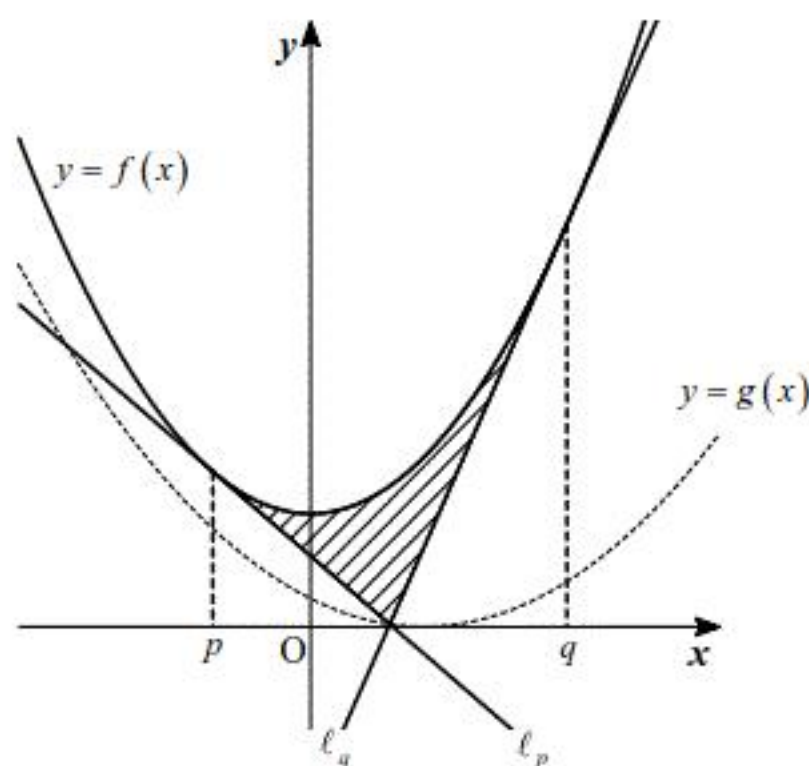
$$\therefore pq = \frac{1}{2}(r-1)^2 - 2 = \frac{1}{2}(r^2 - 2r - 3)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p+q = 2r$$

$$pq = \frac{1}{2}(r^2 - 2r - 3)$$

(2)



求める面積 S は上図の斜線部の面積に等しいため、

$$\begin{aligned} S &= \int_p^r \{(x^2 + 2) - (2px - p^2 + 2)\} dx + \int_r^q \{(x^2 + 2) - (2qx - q^2 + 2)\} dx \\ &= \int_p^r (x-p)^2 dx + \int_r^q (x-q)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-p)^3 \right]_p^r + \left[\frac{1}{3}(x-q)^3 \right]_r^q \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{q-p}{2} \right)^3 + \left\{ -\frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{2} \right)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{12}(q-p)^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{12}(q-p)^3$$

(3)

$$\begin{aligned} (q-p)^2 &= (p+q)^2 - 4pq \\ &= (2r)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}(r^2 - 2r - 3) \\ &= 2(r^2 + 2r + 3) \\ &= 2\{(r+1)^2 + 2\} > 0 \\ \therefore S &= \frac{1}{12}(q-p)^3 = \frac{1}{12} 2^{\frac{3}{2}} \{(r+1)^2 + 2\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$y = x^{\frac{3}{2}}$ は $x > 0$ で増加関数であるから、 $(r+1)^2 + 2$ が最小、すなわち $r = -1$ のとき、 S は最小

値 $\frac{2}{3}$ をとる。そのとき、 $p+q = -2$, $pq = 0$ であるから、 p, q は 2 次方程式 $t^2 + 2t = 0$ の解であ

り、 $p < q$ から $p = -2$, $q = 0$ なる実数解が得られるから、確かにこれが最小値であることがわかる。

$$(\text{答}) \text{ 最小値: } \frac{2}{3}, \quad p = -2, q = 0$$

(1)

A_k : 最大値が k 以下となるのは, 出た目の数が 3 回とも k 以下の場合である。

C_k : 最小値が k 以下となるのは, 出た目の数が 3 回とも k 以上の場合である。

したがって,

$$P(A_k) = \left(\frac{k}{6}\right)^3, P(C_k) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^3 \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(A_k) = \left(\frac{k}{6}\right)^3, P(C_k) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^3 \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

(2)

B_k : 最大値がちょうど k となるのは, 最大値が k 以下となる場合から, 最大値が $(k-1)$ 以下

となる場合を除けばよい。 A_0 を定義すれば, $P(A_k) = \left(\frac{k}{6}\right)^3$ は $k=0$ でも成り立つ。したがっ

て,

$$\begin{aligned} P(B_k) &= P(A_k) - P(A_{k-1}) \\ &= \left(\frac{k}{6}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^3 \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

となる。

$D(k)$: 最小値がちょうど k となるのは, 最小値が k 以上となる場合から, 最小値が $(k+1)$ 以

上となる場合を除けばよい。 C_7 を定義すれば, $P(C_k) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^3$ は $k=7$ でも成り立つ。した

がって,

$$P(D_k) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^3 - \left(\frac{6-k}{6}\right)^3 \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(B_k) = \left(\frac{k}{6}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^3 \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$P(D_k) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^3 - \left(\frac{6-k}{6}\right)^3 \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

(3)

最大値の期待値 E_1 は,

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{k=1}^6 kP(B_k) \\ &= \sum_{k=1}^6 k \left\{ \left(\frac{k}{6}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^3 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^6 \left\{ k \left(\frac{k}{6}\right)^3 - (k-1) \left(\frac{k-1}{6}\right)^3 \right\} - \sum_{k=1}^6 \left(\frac{k-1}{6}\right)^3 \\ &= 6 \cdot \left(\frac{6}{6}\right)^3 - \sum_{k=1}^5 \left(\frac{k}{6}\right)^3 \\ &= 6 - \frac{1}{6^3} \cdot \left\{ \frac{5 \cdot 6}{2} \right\}^2 = 6 - \frac{1}{6^3} \cdot \frac{25 \cdot 6^2}{4} \\ &= 6 - \frac{25}{24} = \frac{119}{24} \end{aligned}$$

であり, 最小値の期待値 E_2 は

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{k=1}^6 kP(D_k) \\ &= \sum_{k=1}^6 k \left\{ \left(\frac{7-k}{6}\right)^3 - \left(\frac{6-k}{6}\right)^3 \right\} \\ &= \sum_{l=1}^6 (7-l) \left\{ \left(\frac{l}{6}\right)^3 - \left(\frac{l-1}{6}\right)^3 \right\} \quad (l=7-k \Leftrightarrow k=7-l) \\ &= \sum_{l=1}^6 7 \left\{ \left(\frac{l}{6}\right)^3 - \left(\frac{l-1}{6}\right)^3 \right\} - \sum_{l=1}^6 l \left\{ \left(\frac{l}{6}\right)^3 - \left(\frac{l-1}{6}\right)^3 \right\} \\ &= 7 - \left(6 - \frac{25}{24} \right) = 1 + \frac{25}{24} \\ &= \frac{49}{24} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値の期待値} : \frac{119}{24}$$

$$\text{最小値の期待値} : \frac{49}{24}$$

5

(1)

$$(x^2+2x+2)f(x)=1$$

である。この両辺を x で微分して

$$2(x+1)f(x)+(x^2+2x+2)f'(x)=0$$

となり、さらに両辺を x で微分して

$$2f(x)+4(x+1)f'(x)+(x^2+2x+2)f''(x)=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

なる式がすべての実数 x に対して成り立つ。問題にある

$$2f(x)+a(x+1)f'(x)+(x^2+2x+2)f''(x)=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

がすべての実数 x に対して成り立つとすると、 $\textcircled{2}-\textcircled{1}$ より、

$$(a-4)(x+1)f'(x)=0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

もまたすべての実数 x に対して成り立つ。 $f(x)$ は定数関数ではないから、 $f'(x)$ は恒等的に 0 ではなく、したがって、 $\textcircled{3}$ 式がすべての実数 x に対して成り立つためには、

$$a=4$$

が必要十分である。

(答) $a=4$

(2)

$$I_m = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos 2x dx \quad (m \text{ は整数}) \text{ とおく。}$$

[1] $m=\pm 2$ のとき

$\cos(-2x)=\cos 2x$ であるから、いずれの場合も、

$$\begin{aligned} I_m &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos^2 2x dx \\ &= \int_0^{\pi} (1+\cos 4x) dx \\ &= \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる。ここで、2 つ目の等号では、 $\cos^2 2x$ が偶関数であることを用いた。

[2] $m \neq \pm 2$ のとき

$$\begin{aligned} I_m &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos 2x dx = 2 \int_0^{\pi} \cos mx \cos 2x dx \quad (\because \cos mx \cos 2x \text{ は偶関数}) \\ &= \int_0^{\pi} \{ \cos(m+2)x + \cos(m-2)x \} dx \\ &= \left[\frac{1}{m+2} \sin(m+2)x + \frac{1}{m-2} \sin(m-2)x \right]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、

$$I_n = \begin{cases} \pi & (m=\pm 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq \pm 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

(答) $I_n = \begin{cases} \pi & (m=\pm 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq \pm 2 \text{ のとき}) \end{cases}$

(3)

$$\frac{1}{(n+k)(2n-k-1)} = \frac{1}{3n-1} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-k-1} \right)$$

と部分分数に分解する。ここで、2 項目の和について、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n-k-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+(n-k-1)} \quad (l=n-k-1 \text{ とおくと、} l=0, 1, \dots, n-1) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{n+l} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \end{aligned}$$

と整理できるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+k)(2n-k-1)} &= \frac{1}{3n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-k-1} \right) \\ &= \frac{2}{3n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

$$n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+k)(2n-k-1)} = \frac{2n}{3n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \text{ について、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3-\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= [\log(1+x)]_0^1 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

であることより、

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+k)(2n-k-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{2}{3} \log 2 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+k)(2n-k-1)} = \frac{2}{3} \log 2$

(1)

まず、次のことに注意する。

$$\text{四角形 } A_n B_n C_n D_n \text{ が正方形} \Leftrightarrow \begin{cases} A_n B_n \parallel B_n C_n & \cdots \cdots ① \\ B_n C_n \parallel A_n D_n & \cdots \cdots ② \\ A_n B_n \perp B_n C_n & \cdots \cdots ③ \\ A_n B_n = B_n C_n & \cdots \cdots ④ \end{cases}$$

実際、 $(\Rightarrow)$ は明らかであり、逆に、 $(\Leftarrow)$ については、①かつ②より、四角形 $A_n B_n C_n D_n$ は平行四辺形であり、さらに③が成り立てば、内角がすべて 90° となり、長方形だから、④より隣合う2辺が等しいこととあわせ、正方形であることがしただう。

n に関する命題

$A(n)$: 四角形 $A_n B_n C_n D_n$ が正方形である

を考え、すべての自然数 n に対して、 $A(n)$ が真であることを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

問題文の仮定により、 $A(1)$ は真である。

[2] $n=k$ のとき、 $A(k)$ は真であると仮定する。

正方形 $A_k B_k C_k D_k$ の一辺の長さを a_k とする。下図のように、 B_k を原点とし、直線 $B_k C_k$, $B_k A_k$ をそれぞれ x 軸, y 軸とする座標平面を考える。

$N_k \left(\frac{a_k}{2}, a_k \right)$ より、直線 $A_{k+1} B_{k+1}$ の方程式は $y=2x$ であり、 $L_k \left(\frac{a_k}{2}, 0 \right)$, $B_k(a_k, a_k)$ より、直線 $D_k C_k$ の方程式は $y=2x-a_k$ となる。これらは傾きが等しいから、

$$A_{k+1} B_{k+1} \parallel D_{k+1} C_{k+1} \quad \cdots \cdots ①'$$

がわかる。

同様に、 $K_k \left(0, \frac{a_k}{2} \right)$, $C_k(a_k, 0)$ より直線 $B_{k+1} C_{k+1}$ の方程式は $y=-\frac{1}{2}x+\frac{a_k}{2}$ であり、

$A_k(0, a_k)$, $M_k \left(a_k, \frac{a_k}{2} \right)$ より直線 $A_{k+1} D_{k+1}$ の方程式は $y=-\frac{1}{2}x+a_k$ となるので、

傾きが等しいことから、

$$B_{k+1} C_{k+1} \parallel A_{k+1} D_{k+1} \quad \cdots \cdots ②'$$

が成り立つ。

$A_{k+1} B_{k+1}: y=2x$ と $B_{k+1} C_{k+1}: y=-\frac{1}{2}x+\frac{a_k}{2}$ の傾きの積は -1 であるから、

$$A_{k+1} B_{k+1} \perp B_{k+1} C_{k+1} \quad \cdots \cdots ③'$$

となる。さらに、

$A_{k+1} \left(\frac{2}{5}a_k, \frac{4}{5}a_k \right)$, $B_{k+1} \left(\frac{1}{5}a_k, \frac{2}{5}a_k \right)$, $C_{k+1} \left(\frac{3}{5}a_k, \frac{1}{5}a_k \right)$ であるから、

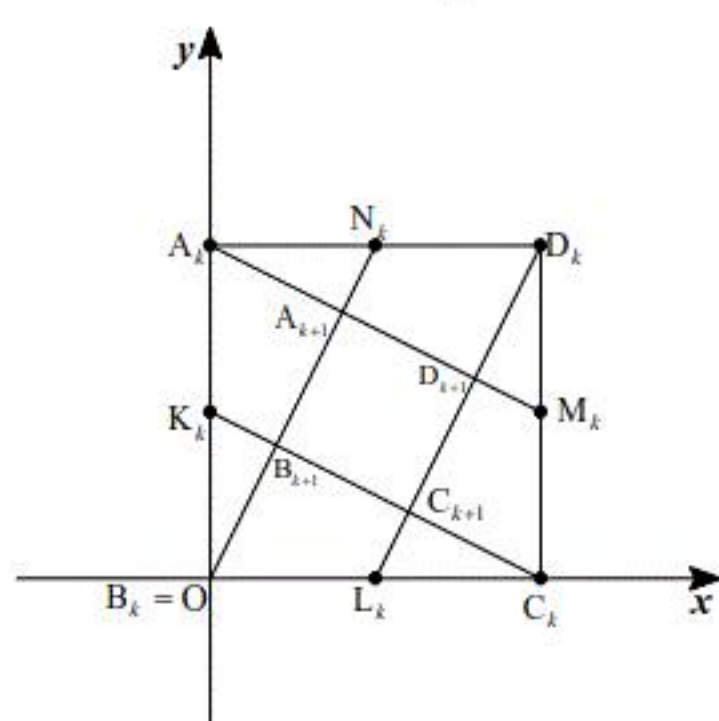
$$\left. \begin{aligned} A_{k+1} B_{k+1} &= \frac{a_k}{5} \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} a_k \\ B_{k+1} C_{k+1} &= \frac{a_k}{5} \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} a_k \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (※)$$

より、

$$A_{k+1} B_{k+1} = B_{k+1} C_{k+1} \quad \cdots \cdots ④'$$

が成り立つ。①'~④'により、四角形 $A_{k+1} B_{k+1} C_{k+1} D_{k+1}$ は正方形となり、 $A(n)$ は $n=k+1$ のときも真である。

以上、[1], [2]より、すべての自然数 n に対して、 $A(n)$ は真であることが示された。



(証明終)

(2)

$\triangle A_n A_{n+1} N_n$ と $\triangle B_n A_n N_n$ は相似であり、したがって、

$$A_n A_{n+1} : A_{n+1} N_n : N_n A_n = 2 : 1 : \sqrt{5}$$

である。また、対称性から、4つの三角形は合同であり、(1)より

$$a_1 = a, a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} a_n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

$$\therefore a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^{n-1} a \quad (n=1, 2, \cdots)$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_n &= 4 \triangle A_n A_{n+1} N_n \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} A_{n+1} A_n \cdot A_{n+1} N_n \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a_n}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{a_n^2}{5} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^{2n-2} a^2 \\ &= \left(\frac{1}{5} \right)^n a^2 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \left(\frac{1}{5} \right)^n a^2$$

(3)

求める和は、初項 $\frac{a^2}{5}$, 公比 $\frac{1}{5}$ の無限等比級数の和である。 $0 < \frac{1}{5} < 1$ より、これは収束し、その値は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{a^2}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{a^2}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{a^2}{4}$$