

1

(1)

$A \cap B \cap C$ は 10000 以下の自然数のうち 8 の倍数かつ 12 の倍数かつ 16 の倍数の集合である。
 ここで、8, 12, 16 の最小公倍数は 48 であるから、 $A \cap B \cap C$ の要素の個数は 10000 以下の自然数のうち 48 の倍数である数の個数と一致するため、

$$10000 \div 48 = 208 \text{ あまり } 16$$

より、208 個である。

(答) 208 個

(2)

$\left(\frac{x}{2} - y\right)^{12}$ の展開式における $x^5 y^7$ の項の係数は、二項定理より

$$\begin{aligned} {}_{12}C_5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 (-1)^7 &= -\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^5} \\ &= -\frac{99}{4} \end{aligned}$$

である。

(答) $-\frac{99}{4}$

(3)

真数条件より、 $x > 0$ であることが必要である。このとき、方程式の解は

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{x}{2} + \log_4 (32x) + \log_8 \frac{x^3}{\sqrt{8}} &= 6 \\ \Leftrightarrow \log_2 x - 1 + \frac{\log_2 32 + \log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x^3 - \log_2 \sqrt{8}}{\log_2 8} &= 6 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2} \log_2 x &= 5 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= 2 \\ \therefore x &= 4 (> 0) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $x = 4$

(4)

与えられた関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$ を微分すると、

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$$

となる。 $x = 1$ で極小値 1 を取るとき、必要条件として

$$\begin{aligned} \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + 1 = 0 \\ a + b + 2 = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = 1, b = -2 \end{aligned}$$

を得る。逆に $a = 1, b = -2$ のとき、

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

であり、この関数を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 4x + 1 \\ &= (3x - 1)(x - 1) \end{aligned}$$

より、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって、確かに関数 $f(x)$ は $x = 1$ で極小値を取るから、求める a, b は

$$a = 1, b = -2$$

であることがわかる。

(答) $a = 1, b = -2$

(5)

与えられた定積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 (x-3)(x-1) dx \\ &= \int_{-2}^2 (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_{-2}^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 8 + 6 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 8 - 6 \right) \\ &= \frac{52}{3} \end{aligned}$$

と計算できる。

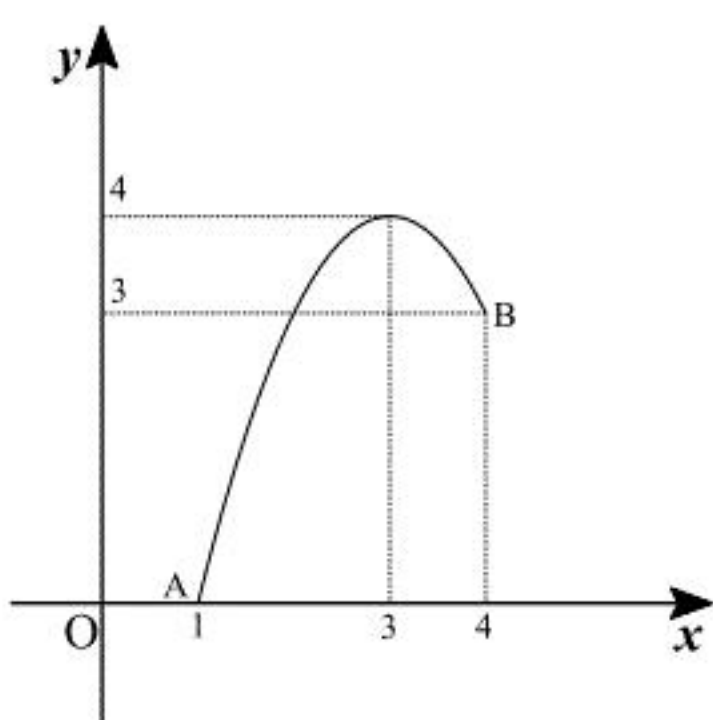
(答) $\frac{52}{3}$

(1)

与えられた 2 次関数を平方完成すると、

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 6x - 5 \\ &= -(x-3)^2 + 4 \end{aligned}$$

となるから、 xy 平面上でこの関数が表すグラフは、上に凸で頂点が $(3, 4)$ である放物線であることがわかる。また、 $x=1$ において $y=0$ であることに注意すると、求めるグラフの概形は以下の図のようになることがわかる。



(答) 前図

(2)

点 C は(1)で求めたグラフ上にあるから、この点の座標は $(t, -t^2 + 6t - 5)$ ($1 \leq t \leq 4$) とおける。

(i)

点 A, B の座標はそれぞれ $(1, 0)$, $(4, 3)$ であるから、

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} t-1 \\ -t^2+6t-5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} t-4 \\ -t^2+6t-8 \end{pmatrix}$$

であるため、 $\triangle ABC$ の面積は、 $1 \leq t \leq 4$ に注意して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |(t-1)(-t^2+6t-8) - (t-4)(-t^2+6t-5)| &= \frac{3}{2} |(t-1)(t-4)| \\ &= -\frac{3}{2} (t-1)(t-4) \end{aligned}$$

と表せる。この値が 3 と等しいとき、 t の値は

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} (t-1)(t-4) &= 3 \\ \Leftrightarrow (t-1)(t-4) &= -2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)(t-3) &= 0 \\ \therefore t &= 2, 3 \quad (\because 1 \leq t \leq 4) \end{aligned}$$

と求まるから、点 C の座標は

$$(2, -2^2 + 6 \cdot 2 - 5), (3, -3^2 + 6 \cdot 3 - 5) = (2, 3), (3, 4)$$

と求まる。

(答) $(2, 3), (3, 4)$

(ii)

$\triangle ABC$ の面積を $S(t)$ とおくと、(i)における考察より、

$$\begin{aligned} S(t) &= -\frac{3}{2} (t-1)(t-4) \\ &= -\frac{3}{2} \left(t - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{27}{8} \end{aligned}$$

と表せるから、 $S(t)$ は $t = \frac{5}{2}$ ($\because 1 \leq \frac{5}{2} \leq 4$) のとき、つまり点 C の座標が

$$\left(\frac{5}{2}, -\left(\frac{5}{2} \right)^2 + 6 \cdot \frac{5}{2} - 5 \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4} \right)$$

のときに最大となる。

(答) $\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4} \right)$

(iii)

(i)における考察より、

$$\begin{aligned} AC &= BC \\ \Leftrightarrow AC^2 &= BC^2 \\ \Leftrightarrow (t-1)^2 + (-t^2+6t-5)^2 &= (t-4)^2 + (-t^2+6t-8)^2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 7t + 9 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{7-\sqrt{13}}{2} \quad (\because 1 \leq t \leq 4) \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} -t^2 + 6t - 5 &= -(t^2 - 7t + 9) - t + 4 \\ &= -0 - \frac{7-\sqrt{13}}{2} + 4 \\ &= \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

となるから、求める点 C の座標は $\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$ である。

(答) $\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$

(1)

$t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくとき、 $\sin \theta \cos \theta$ は

$$\begin{aligned}\sin \theta \cos \theta &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{2} \\ &= \frac{t^2 - 1}{2}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

(2)

与えられた 3 次方程式 $8x^3 - 12x^2 + x + a = 0$ が $\sin \theta, \cos \theta$ ($\sin \theta \neq \cos \theta$) を解に持つとき、

$$\begin{cases} 8\sin^3 \theta - 12\sin^2 \theta + \sin \theta + a = 0 \\ 8\cos^3 \theta - 12\cos^2 \theta + \cos \theta + a = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。2 式の辺々を引いて変形することで、

$$\begin{aligned}8(\sin^3 \theta - \cos^3 \theta) - 12(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow 8(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) - 12(\sin \theta + \cos \theta) + 1 &= 0 \quad (\because \sin \theta \neq \cos \theta) \\ \Leftrightarrow 8\left(1 + \frac{t^2 - 1}{2}\right) - 12t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 12t + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2t - 5)(2t - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\end{aligned}$$

を得るが、ここで、三角関数の合成を行うことにより、

$$\begin{aligned}t &= \sin \theta + \cos \theta \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\leq \sqrt{2}\end{aligned}$$

であることがわかるから、 $t = \frac{5}{2} (> \sqrt{2})$ は不適である。一方、 $t = \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \end{cases} \\ \Leftrightarrow (\sin \theta, \cos \theta) = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}, \frac{1-\sqrt{7}}{4}\right), \left(\frac{1-\sqrt{7}}{4}, \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)\end{aligned}$$

となり、これは $\sin \theta \neq \cos \theta$ を満たすから適する。したがって、 $t = \frac{1}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{2}$$

(3)

(2)における考察より、 $t = \frac{1}{2}$ のとき $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$, $\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$ であるから、解と係数の関係より、2 次方程式

$$\begin{aligned}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} &= 0 \\ \Leftrightarrow 8x^2 - 4x - 3 &= 0\end{aligned}$$

は $\sin \theta, \cos \theta$ を解にもつ。

$$(\text{答}) \quad 8x^2 - 4x - 3 = 0$$

(4)

$8x^3 - 12x^2 + x + a$ を(3)で求めた多項式 $8x^2 - 4x - 3$ で割ると、

$$8x^3 - 12x^2 + x + a = (x-1)(8x^2 - 4x - 3) + a - 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで①の両辺に $x = \sin \theta$ (または $x = \cos \theta$) を代入することで、

$$\begin{aligned}a - 3 &= 0 \\ \therefore a &= 3\end{aligned}$$

を得る。また、 $a = 3$ のとき①より、

$$\begin{aligned}8x^3 - 12x^2 + x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(8x^2 - 4x - 3) &= 0\end{aligned}$$

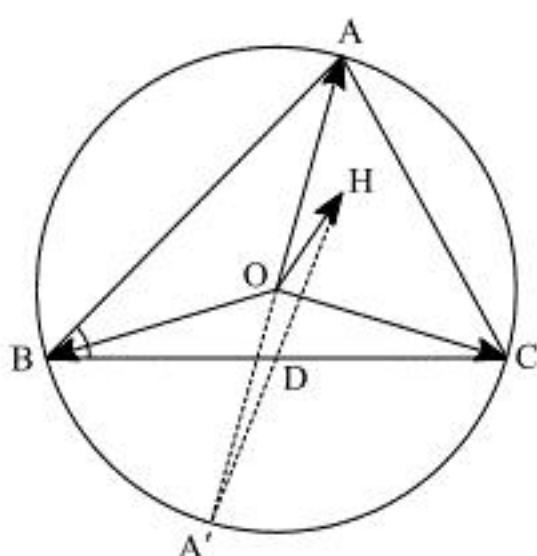
となるから、(2)で求めた $\sin \theta, \cos \theta$ の値も込めて、

$$x = 1, \frac{1+\sqrt{7}}{4}, \frac{1-\sqrt{7}}{4}$$

が 3 次方程式(*)の解であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad a = 3, \text{ 3 次方程式(*)の解: } x = 1, \frac{1+\sqrt{7}}{4}, \frac{1-\sqrt{7}}{4}$$

$\triangle ABC$ とその外接円を図示すると、以下の図のようになる。



(1)

点 A' は点 O に関して点 A と対称な点であり、また点 D は BC の中点であるから、

$$\overrightarrow{OA'} = -\vec{a}, \overrightarrow{OD} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

である。さて、点 D は点 H と点 A' の中点であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA'}) &= \overrightarrow{OD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} &= 2\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA'} \\ \therefore \vec{h} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

(2)

点 O は $\triangle ABC$ の外心であるから

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$$

を満たす。この条件に注意して、各ベクトルの内積を計算すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるため、 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA}$ であることが示された。(尚、 $\vec{0}$ は任意のベクトル $\vec{x}$ に対して $\vec{0} \perp \vec{x}$ であると考えことにする。)

(証明終)

(3)

$\theta = \angle ABC$, R を外接円の半径としたとき、

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R$$

であり、円周角の定理より、

$$\begin{aligned} \angle AOC &= 2\angle ABC \\ &= 2\theta \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} BH^2 &= |\overrightarrow{BH}|^2 \\ &= |\vec{a} + \vec{c}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= 2R^2 + 2|\vec{a}||\vec{c}|\cos \angle AOC \\ &= 2R^2 + 2R^2 \cos 2\theta \\ &= 2R^2 (1 + 2\cos^2 \theta - 1) \\ &= 4R^2 \cos^2 \theta \\ \therefore BH &= 2R|\cos \theta| \quad (\because R > 0) \end{aligned}$$

となる。したがって、題意は示された。

(証明終)

(1)

$\triangle ABC$ に余弦定理を用いることにより, CA の長さは

$$\begin{aligned} CA^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle B \\ &= (1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(1 + \sqrt{3})\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 4 \\ \therefore CA &= 2 \end{aligned}$$

と求まる。また, $\triangle ABC$ に正弦定理を用いることにより,

$$\begin{aligned} \sin \angle A &= \frac{BC}{CA} \sin \angle B \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるが, $\angle B = 45^\circ$ より $\angle A < 135^\circ$ であるから,

$$\angle A = 30^\circ$$

と求まる。

(答) $CA = 2, \angle A = 30^\circ$

(2)

$(a+2b)^6$ の展開式における a^4b^2 の項の係数は, 二項定理より,

$${}_6C_2 \cdot 1^4 \cdot 2^2 = 60$$

であることがわかる。また, $(c-d)^7$ の展開式における c^2d^5 の項の係数は, 同様に考えて

$${}_7C_2 \cdot 1^2 \cdot (-1)^5 = -21$$

であることがわかる。したがって, $(a+2b)^6(c-d)^7$ の展開式における $a^4b^2c^2d^5$ の項の係数は

$$60 \cdot (-21) = -1260$$

である。

(答) -1260

(3)

真数条件より, $x > 0$ であることが必要である。このとき, 方程式の解は

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{x}{2} + \log_4 (32x) + \log_8 \frac{x^3}{\sqrt{8}} &= 6 \\ \Leftrightarrow \log_2 x - 1 + \frac{\log_2 32 + \log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x^3 - \log_2 \sqrt{8}}{\log_2 8} &= 6 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2} \log_2 x &= 5 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= 2 \\ \therefore x &= 4 (> 0) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $x = 4$

(4)

関数 $y = \sin^2(3x)$ を x について微分して, 整理すると

$$\begin{aligned} y' &= 2 \sin(3x) \cdot (\sin 3x)' \\ &= 2 \sin(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 \\ &= 6 \sin(3x) \cos(3x) \\ &= 3 \sin(6x) \end{aligned}$$

となる。

(答) $y' = 3 \sin(6x)$

(5)

区分求積法によって,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \sqrt{x} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - 0 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) = \frac{2}{3}$

(1)

与えられた関数 $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}$ を微分することで、導関数 $f'(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+a)'(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + (x+a)\left\{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right\}' \\ &= (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x+a)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{-ax+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{-ax+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

(2)

関数 $y=f(x)$ は全実数で微分可能であるから、最小値をもつためには極小値をもつ必要があり、このとき方程式 $f'(x)=0$ が解をもつことが必要である。以下 a の値で場合分けして考える。

[1] $a=0$ のとき

(1)より常に $f'(x)>0$ であるから、必要条件を満たさないため不適である。

[2] $a \neq 0$ のとき

(1)の結果より、

$$f'(x) = \frac{-a\left(x - \frac{1}{a}\right)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表をかくと、以下のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	最小	$\nearrow$

したがって、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{a}$ において最小になり、このときの最小値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{a}\right) &= \frac{\frac{1}{a}+a}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}} \\ &= \frac{|a|}{a} \cdot \frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}} \\ &= \frac{|a|}{a} \cdot \sqrt{a^2+1} \end{aligned}$$

である。この値が $-\sqrt{2}$ に等しいとき、 $a < 0$ であることが必要であり、このとき

$$\begin{aligned} -\sqrt{a^2+1} &= -\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow a^2+1 &= 2 \\ \Leftrightarrow a &= \pm 1 \\ \therefore a &= -1 \quad (\because a < 0) \end{aligned}$$

を得る。

(答) $a = -1$

(3)

$a = -1$ のとき、関数 $y=f(x)$ の増減表は(2)の考察より、

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$

となる。また、曲線 $y=f(x)$ の x 切片は

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} &= 0 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

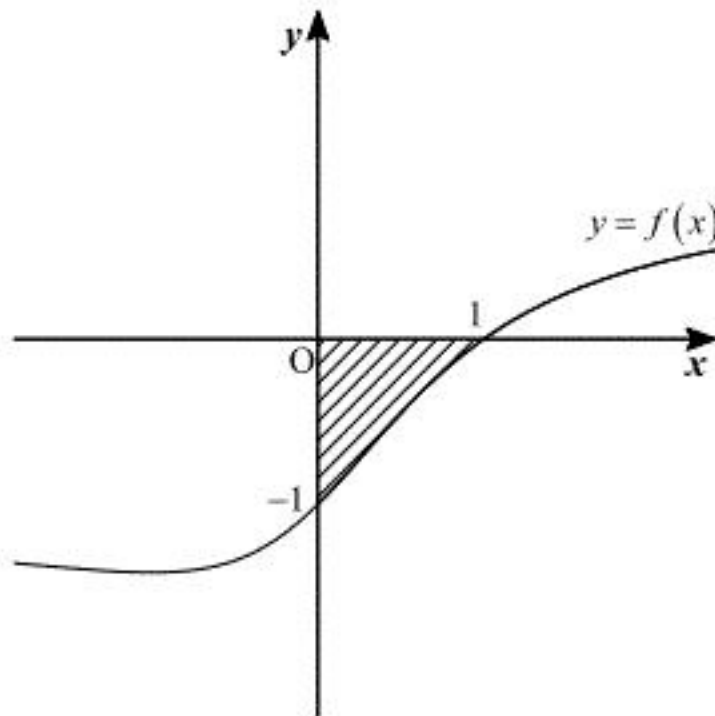
であり、 y 切片は

$$\begin{aligned} y &= \frac{0-1}{\sqrt{0^2+1}} \\ \therefore y &= -1 \end{aligned}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

であるから、曲線 $y=f(x)$ と x 軸、 y 軸で囲まれる部分は下図の斜線部のようになる。



よって、この斜線部を x 軸まわりに1回転してできる立体の体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 y^2 dx &= \pi \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx \\ &= \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \right) dx \\ &= \pi \left[x - \log(x^2+1) \right]_0^1 \\ &= \pi \{ (1 - \log 2) - (0 - \log 1) \} \\ &= (1 - \log 2) \pi \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $(1 - \log 2) \pi$

(1)

 $x-1=t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \log|x-1| &= \lim_{t \rightarrow 0} \log|t| \\ &= -\infty\end{aligned}$$

となることから、求める極限は

$$\lim_{x \rightarrow 1} x \log|x-1| = -\infty$$

である。

$$(\text{答}) \lim_{x \rightarrow 1} x \log|x-1| = -\infty$$

(2)

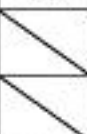
関数 $f(x) = x \log|x-1|$ を微分すると,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \log|x-1| + \frac{x}{x-1} \\ &= \log|x-1| + \frac{1}{x-1} + 1\end{aligned}$$

となる。さらに $f'(x)$ を微分すると,

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x-2}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

となるから、 $f'(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	(1)	...	2	...
$f''(x)$	-		-	0	+
$f'(x)$				極小	

ここで、 $x=2$ における $f'(x)$ の値は

$$\begin{aligned}f'(2) &= \log|2-1| + \frac{1}{2-1} + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

であるから、 $x>1$ において導関数 $f'(x)$ は $x=2$ で極小値 2 をもつ。

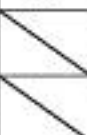
(答) 2

(3)

(2) で求めた増減表より、 $x>1$ の範囲で $f'(x)>0$ であることに加えて

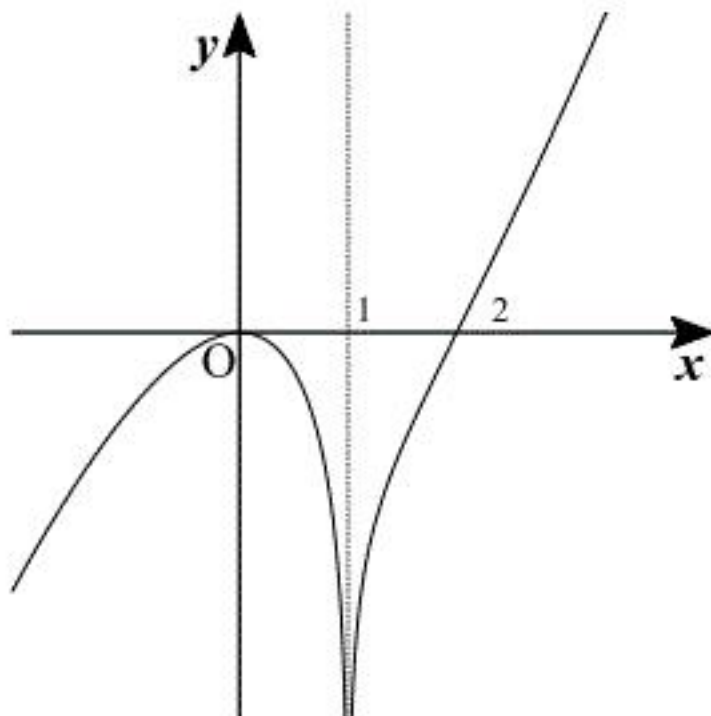
$$f'(0)=0$$

より、 $f(x)$ の増減凹凸表は以下のようになる。

x		0		(1)		2	
$f''(x)$	-	-	-		-	0	+
$f'(x)$	+	0	-		+	2	+
$f(x)$		0				0	

また、(1) の結果より

$$\lim_{x \rightarrow 1} x \log|x-1| = -\infty$$

であることに注意すると、 xy 平面上において $y=f(x)$ のグラフは以下の図のようになる。

(答) 前図

(1)

$f(x) = \cos x - kx$ とおき、この関数を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x - k \\ &= -(\sin x + k) \end{aligned}$$

となる。よって $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で考えると、 $\sin x > 0, k > 0$ より、常に $f(x) < 0$ となる。また、

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{k\pi}{2} < 0 \quad (\because k > 0) \end{cases}$$

であるから、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	(1)	$\searrow$	$\left(-\frac{k\pi}{2}\right)$

さらに $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $f(x)$ は連続な関数であるから、 $f(x) = 0$ を満たす実数 x が区間

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ にただ一つ存在することがわかる。よって、方程式 $\cos x = kx$ は区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ にただ一つの解をもつことが示された。

(証明終)

(2)

(1)の増減表より、

$$0 < x \leq \alpha \text{ の範囲で } f(x) \geq 0$$

$$\alpha \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ の範囲で } f(x) \leq 0$$

であることがわかるから、 S を計算すると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx \\ &= \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \{-f(x)\} dx \\ &= \left[\sin x - \frac{1}{2} kx^2 \right]_0^{\alpha} + \left[\frac{1}{2} kx^2 - \sin x \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left\{ \sin \alpha - \frac{1}{2} k\alpha^2 - (0 - 0) \right\} + \left\{ \frac{1}{2} k \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 1 - \left(\frac{1}{2} k\alpha^2 - \sin \alpha \right) \right\} \\ &= 2 \sin \alpha - k\alpha^2 + \frac{\pi^2}{8} k - 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\cos \alpha = k\alpha$ と $\alpha \neq 0$ より

$$k = \frac{\cos \alpha}{\alpha}$$

であるから、

$$S = 2 \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \frac{\pi^2 \cos \alpha}{8\alpha} - 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = 2 \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \frac{\pi^2 \cos \alpha}{8\alpha} - 1$$

(3)

S を α についての関数とみて微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= 2 \cos \alpha - \cos \alpha + \alpha \sin \alpha - \frac{\pi^2 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)}{8\alpha^2} \\ &= \frac{(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)(8\alpha^2 - \pi^2)}{8\alpha^2} \\ &= \frac{(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha) \left(\alpha + \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \right) \left(\alpha - \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \right)}{\alpha^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲では

$$\alpha \sin \alpha + \cos \alpha > 0, \quad \alpha + \frac{\sqrt{2}}{4} \pi > 0$$

であるから、 S の増減表は以下のようになる。

α	(0)	...	$\frac{\sqrt{2}}{4} \pi$	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
S'		-	0	+	
S		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

したがって、 $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$ のときに S は最小となるが、このときの k の値は

$$\begin{aligned} k &= \frac{\cos \frac{\sqrt{2}}{4} \pi}{\frac{\sqrt{2}}{4} \pi} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

(1)

2次正方行列 A にハミルトン・ケーリーの定理を適用することにより,

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 - 2kA + k^2E &= O \quad (\because a+d=k, ad-bc=k^2) \\ \Leftrightarrow (A-kE)^2 &= O \end{aligned}$$

となる。よって、題意は示された。

(証明終)

(2)

$B = A - kE$ とおいたとき, すべての自然数 n について

$$A^n = nk^{n-1}B + k^nE \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立することを n についての数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき, $\textcircled{1}$ が成立することを示す

$n=1$ のとき, $\textcircled{1}$ は

$$A = B + kE$$

となるが, これは B の定義より成立する。

[2] $n=i$ のとき $\textcircled{1}$ が成立することを仮定し, $n=i+1$ のとき $\textcircled{1}$ が成立することを示す

A^{i+1} を変形していくと,

$$\begin{aligned} A^{i+1} &= A \cdot A^i \\ &= A \cdot (ik^{i-1}B + k^iE) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= ik^{i-1}(B+kE)B + k^i(B+kE) \quad (\because A=B+kE) \\ &= ik^{i-1}\{B^2+kB\} + k^iB + k^{i+1}E \\ &= ik^iB + k^iB + k^{i+1}E \quad (\because (1) \text{より } B^2=O) \\ &= (i+1)k^iB + k^{i+1}E \end{aligned}$$

となるから, $n=i+1$ でも $\textcircled{1}$ は成立する。

以上[1], [2]より, 数学的帰納法によって任意の自然数 n について $\textcircled{1}$ が成立することが示された。

(証明終)

(3)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{cases} 3+1=2k \\ 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = k^2 \end{cases} \Leftrightarrow k=2$$

であるから, 2次正方行列 B は

$$\begin{aligned} B &= A - kE \\ &= A - 2E \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。したがって, (2)より

$$\begin{aligned} A^n &= n2^{n-1}B + 2^nE \\ &= n2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n2^{n-1} + 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & -n2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad A^n = \begin{pmatrix} n2^{n-1} + 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & -n2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix}$$