

(前期日程)

平成20年度 数 学

問題の選択方法

教育学部 } の受験者は [1], [2], [3], [4] の4問
農学部 }

医学部 の受験者は [4], [6], [7], [8] の4問

工学部 の受験者は [4], [5], [6], [7] の4問

理学部 の受験者は [4], [5], [6], [7], [9] の5問

を解答すること。

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は、18 ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。

- 3 解答は、すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。
- 4 問題紙の余白は下書きに使用してよい。

次の問に答えよ。

- (1) 10000 以下の自然数のうち、8 の倍数の集合を A 、12 の倍数の集合を B 、16 の倍数の集合を C とする。 $A \cap B \cap C$ の要素の個数を求めよ。

- (2) $\left(\frac{x}{2} - y\right)^{12}$ の展開式において、 $x^5 y^7$ の係数を求めよ。

- (3) 次の方程式を解け。

$$\log_2 \frac{x}{2} + \log_4 (32x) + \log_8 \frac{x^3}{\sqrt{8}} = 6$$

- (4) 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$ が $x = 1$ で極小値 1 をとるとき、定数 a 、 b を求めよ。

- (5) $\int_{-2}^2 (x-3)(x-1) dx$ を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

2

2 次関数 $y = -x^2 + 6x - 5$ ($1 \leq x \leq 4$) のグラフにおいて, $x = 1$, $x = 4$ のときの 2 つの端点をそれぞれ A, B とし, 点 C をこの曲線上の動点とする。

- (1) この 2 次関数のグラフをかけ。
- (2) 以下のそれぞれの条件をみたす点 C の座標を求めよ。
 - (i) $\triangle ABC$ の面積が 3 である。
 - (ii) $\triangle ABC$ の面積が最大である。
 - (iii) $\triangle ABC$ が $AC = BC$ となる二等辺三角形である。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

3

a と θ を定数とし, 3 次方程式

$$8x^3 - 12x^2 + x + a = 0 \cdots (*)$$

は $\sin \theta$ と $\cos \theta$ ($\sin \theta \neq \cos \theta$) を解にもつとする。

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくとき, $\sin \theta \cos \theta$ を t で表せ。
- (2) (1) でおいた t の値を求めよ。
- (3) $\sin \theta$ と $\cos \theta$ を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。
- (4) 定数 a の値と 3 次方程式(*)のすべての解を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

4

$\triangle ABC$ の外心を O , 点 A を通る外接円の直径を AA' とし, BC の中点を D , 点 D に関し点 A' と対称である点を H とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OH} = \vec{h}$ とおく。

(1) $\vec{h}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA}$ を示せ。

(3) $\theta = \angle ABC$ とし, R を外接円の半径とする。 $BH = 2R|\cos \theta|$ であることを示せ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

次の問に答えよ。

(1) $\triangle ABC$ において、 $AB = 1 + \sqrt{3}$ 、 $BC = \sqrt{2}$ 、 $\angle B = 45^\circ$ とする。 CA の長さと $\angle A$ の大きさを求めよ。

(2) $(a + 2b)^6(c - d)^7$ の展開式において、 $a^4b^2c^2d^5$ の係数を求めよ。

(3) 次の方程式を解け。

$$\log_2 \frac{x}{2} + \log_4(32x) + \log_8 \frac{x^3}{\sqrt{8}} = 6$$

(4) 関数 $y = \sin^2(3x)$ を微分せよ。

(5) 定積分を用いて、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right)$ を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

6.

a を実数とし、 $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}$ とおく。

- (1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ が最小値 $-\sqrt{2}$ をもつとき、 a の値を求めよ。
- (3) a を (2) で求めた値とすると、曲線 $y = f(x)$ と x 軸、 y 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

7

$f(x) = x \log|x - 1|$ とおく。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ を求めよ。
- (2) $x > 1$ において、導関数 $f'(x)$ の極値を求めよ。
- (3) 関数 $y = f(x)$ の増減，極値，曲線の凹凸を調べてグラフをかけ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

k を正の実数とし、 $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - kx| dx$ とおく。

- (1) 方程式 $\cos x = kx$ は区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ にただ一つの解をもつことを示せ。
- (2) (1) の解を α とする。 S を α を用いて表せ。
- (3) $k > 0$ において、 S を最小にする k の値を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

9

行列 A, E, O を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。ここで, a, b, c, d は実数で, ある実数 k に対して,

$$a + d = 2k, \quad ad - bc = k^2$$

をみたしている。

(1) $(A - kE)^2 = O$ を示せ。

(2) $B = A - kE$ とおく。自然数 n に対して,

$$A^n = nk^{n-1}B + k^nE$$

が成り立つことを示せ。

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A^n (n は自然数) を求めよ。