

1

(1)

$x \geq 1$ のとき、与式は

$$x^2 + 2(x-1) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

$x \geq 1$ より

$$x = -1 + 2\sqrt{2}$$

$x < 1$ のとき、与式は

$$x^2 - 2(x-1) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, 3$$

$x < 1$ より

$$x = -1$$

以上から

$$x = -1, -1 + 2\sqrt{2}$$

…(答)

(2)

$$50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$$

$$= \{50^2 - (50-1)^2\} + \{48^2 - (48-1)^2\} + \cdots + \{2^2 - (2-1)^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^{25} \{(2k)^2 - (2k-1)^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^{25} (4k-1)$$

$$= 4 \cdot \frac{25 \times 26}{2} - 25$$

$$= 1275$$

…(答)

(3)

$$i^{2009} = i^{4 \times 502 + 1}$$

$$= 1^{502} \times i$$

$$= i$$

…(答)

x^{2009} を $x^2 + 1$ で割ったときの余りを $ax + b$ とする。ただし a, b はともに実数とする。

このとき

$$F(x) = x^{2009} = (x^2 + 1)f(x) + ax + b$$

とおくと

$$F(i) = i = ai + b$$

$$\Leftrightarrow a = 1, b = 0$$

よって求める余りは

$$x$$

…(答)

(4)

$$\log_{10} 84^{12} = 12 \log_{10} (2^2 \times 3 \times 7)$$

$$= 12(2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 7)$$

$$= 12(2 \times 0.301 + 0.477 + 0.845)$$

$$= 23.088$$

より

$$\log_{10} 10^{23} < \log_{10} 84^{12} < \log_{10} 10^{24}$$

$$\therefore 10^{23} < 84^{12} < 10^{24}$$

よって 24 桁である。

…(答)

(5)

$A(0, 1), B(2, 3), C(5, 1), D(a, b)$ とおく。

$ABCD, ABDC, ADBC$ がそれぞれ平行四辺形となるのは

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow (2, 2) = (a-5, b-1) \Leftrightarrow a=7, b=3$$

$$\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow (2, 2) = (5-a, 1-b) \Leftrightarrow a=3, b=-1$$

$$\overline{AD} = \overline{CB} \Leftrightarrow (a, b-1) = (-3, 2) \Leftrightarrow a=-3, b=3$$

よって

$$(a, b) = (7, 3), (3, -1), (-3, 3)$$

…(答)

(1)

(i)

2つの球の取り出し方は全部で

$${}_6C_2 = 15 \text{ 通り}$$

で、和が10になるのは4と6を取り出すときの1通りなので

$$\frac{1}{15}$$

…(答)

(ii)

- ・和が11になるのは5と6を取り出すときの1通り
- ・和が10になるのは4と6を取り出すときの1通り
- ・和が9になるのは3と6, 4と5を取り出すときの2通り

よって求める確率は

$$\frac{1+1+2}{15} = \frac{4}{15}$$

…(答)

(2)

(i)

1回の試行で和は最大11なので、2回の試行で20以上になるためには、1回の試行で9以上である必要がある。このとき1回の試行で和が11, 10, 9になる確率は(1)の(ii)からそれぞれ

$$\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}$$

Bは1回の試行では20以上には達しないので、Aが2回目の試行で20以上になることだけを考えればいい。2回目の試行で20以上になるのは、

- ・1回目の試行で得点が9のときで、2回目の試行での得点が11
- ・1回目の試行で得点が10のときで、2回目の試行での得点が10, 11
- ・1回目の試行で得点が11のときで、2回目の試行での得点が9, 10, 11

である。よって求める確率は

$$\frac{2}{15} \times \frac{1}{15} + \frac{1}{15} \times \frac{1+1}{15} + \frac{1}{15} \times \frac{1+1+2}{15} = \frac{8}{225}$$

…(答)

(ii)

Bが2回目の試行で20以上にならず、かつAが2回目の試行で20以上になればよい。

AとBの対称性から、Bが2回目の試行で20以上にならない確率は

$$1 - \frac{8}{225} = \frac{217}{225}$$

よって求める確率は

$$\frac{217}{225} \times \frac{8}{225} = \frac{1736}{50625}$$

…(答)

(1)

 $x+ky=3, kx+y=3$ の両辺を引いて

$$(1-k)(x-y)=0$$

 $k \neq 1$ より

$$x=y$$

よって

$$x=y=\frac{3}{k+1}$$

以上から点 P の座標は

$$\left(\frac{3}{k+1}, \frac{3}{k+1} \right)$$

…(答)

(2)

放物線 $y=ax^2$ が点 P を通るので

$$\frac{3}{k+1} = a \left(\frac{3}{k+1} \right)^2$$

$$\therefore a = \frac{k+1}{3}$$

…(答)

(3)

(i)

$$y' = 2ax$$

なので、点 P での $y=ax^2$ の傾きは

$$2a \frac{3}{k+1} = 2 \frac{k+1}{3} \cdot \frac{3}{k+1} \\ = 2$$

直線 l の傾き $-\frac{1}{k}$ がこれと一致するので

$$2 = -\frac{1}{k}$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2}$$

…(答)

(ii)

(2)より

$$a = \frac{k+1}{3} = \frac{1}{6}$$

以上より

$$y = ax^2 = \frac{1}{6}x^2$$

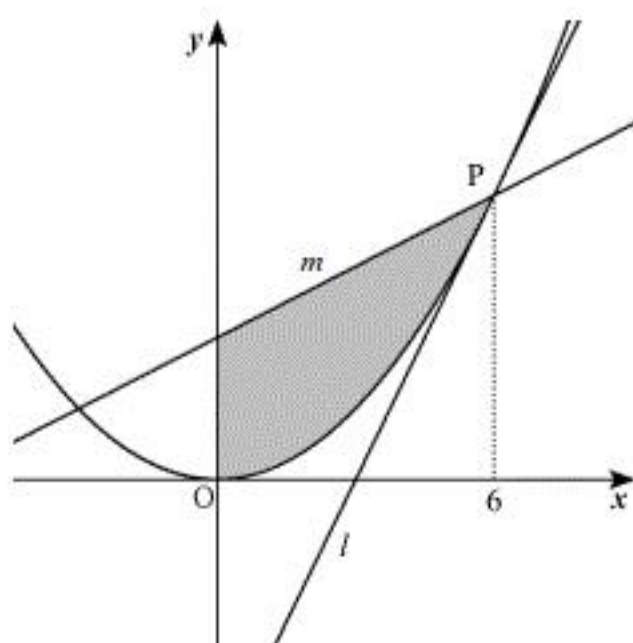
$$m: y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$P: \left(\frac{3}{k+1}, \frac{3}{k+1} \right) = (6, 6)$$

よって求める面積は

$$\int_0^6 \left\{ \left(\frac{1}{2}x + 3 \right) - \frac{1}{6}x^2 \right\} dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + 3x - \frac{1}{18}x^3 \right]_0^6 \\ = 15$$

…(答)



(1)

 $\overrightarrow{AB}=(2, 2, 1), \overrightarrow{AC}=(1, -2, 2)$ より

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=2 \times 1+2 \times (-2)+1 \times 2=0$$

…(答)

(2)

$$|\overrightarrow{AP}|=|(\sin \theta) \overrightarrow{AB}+(\cos \theta) \overrightarrow{AC}|$$

$$= \left| (\sin \theta) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (\cos \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(2 \sin \theta + \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta - 2 \cos \theta)^2 + (\sin \theta + 2 \cos \theta)^2}$$

$$= \sqrt{9(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}$$

$$= 3$$

したがって $|\overrightarrow{AP}|$ は θ の値によらず一定値 3 をとる。

…(証明終)

(3)

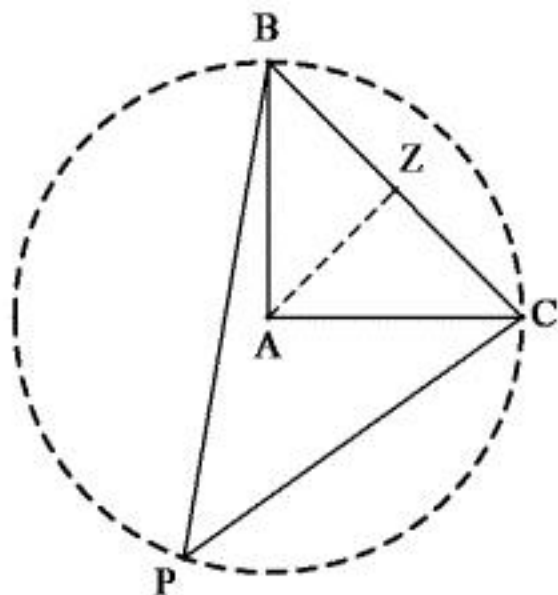
 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で考えればよい。 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=0$ より, AB と AC は直角に交わる。また, 4 点 $ABCP$ は同一平面上にあり, 点 P は A を中心に半径 3 の円上を動く。 $\triangle PBC$ の面積が最大になるのは P が線分 BC から最も離れたときである。これは線分 BC と直線 AP が垂直に交わるときで, これは $\theta = \frac{5}{4}\pi$ のときである。 BC の中点を Z と

すると, 求める面積は

$$\frac{1}{2} \times BC \times PZ = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \right)$$

$$= \frac{9}{2}(\sqrt{2}+1)$$

…(答)



(1)

$$\begin{aligned}
 i^{2009} &= i^{4 \times 502 + 1} \\
 &= 1^{502} \times i \\
 &= i \qquad \qquad \qquad \dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

x^{2009} を x^2+1 で割ったときの余りを $ax+b$ とする。ただし a, b はともに実数とする。

このとき

$$F(x) = x^{2009} = (x^2+1)f(x) + ax+b$$

とおくと

$$F(i) = i = ai+b$$

$$\Leftrightarrow a=1, b=0$$

よって求める余りは

$$x \qquad \qquad \qquad \dots(\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 84^{12} &= 12 \log_{10} (2^2 \times 3 \times 7) \\
 &= 12 (2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 7) \\
 &= 12 (2 \times 0.301 + 0.477 + 0.845) \\
 &= 23.088
 \end{aligned}$$

より

$$\log_{10} 10^{23} < \log_{10} 84^{12} < \log_{10} 10^{24}$$

$$\therefore 10^{23} < 84^{12} < 10^{24}$$

よって 24 桁である。

…(答)

(3)

$A(0, 1), B(2, 3), C(5, 1), D(a, b)$ とおく。

$ABCD, ABDC, ADBC$ がそれぞれ平行四辺形となるのは

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (2, 2) = (a-5, b-1) \Leftrightarrow a=7, b=3$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (2, 2) = (5-a, 1-b) \Leftrightarrow a=3, b=-1$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow (a, b-1) = (-3, 2) \Leftrightarrow a=-3, b=3$$

よって

$$(a, b) = (7, 3), (3, -1), (-3, 3) \qquad \qquad \qquad \dots(\text{答})$$

(4)

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2+3x+2} - 2\sqrt{x^2-x+1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+3x+2} - 2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{4x^2+3x+2} + 2\sqrt{x^2-x+1}} \times \left(\sqrt{4x^2+3x+2} + 2\sqrt{x^2-x+1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2+3x+2 - 4(x^2-x+1)}{\sqrt{4x^2+3x+2} + 2\sqrt{x^2-x+1}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-2}{\sqrt{4x^2+3x+2} + 2\sqrt{x^2-x+1}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7 - \frac{2}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \right) \\
 &= \frac{7}{\sqrt{4}+2} \\
 &= \frac{7}{4} \qquad \qquad \qquad \dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

(5)

(i)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x} dx \\
 &= \left[-\log(1+\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \log 2 \qquad \qquad \qquad \dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \int_1^e x^2 \log x dx &= \int_1^e \left\{ \left(\frac{1}{3} x^3 \right)' \log x \right\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} x^3 \log x \right]_1^e - \int_1^e \left\{ \frac{1}{3} x^3 (\log x)' \right\} dx \\
 &= \frac{1}{3} e^3 - \int_1^e \frac{1}{3} x^2 dx \\
 &= \frac{1}{3} e^3 - \left[\frac{1}{9} x^3 \right]_1^e \\
 &= \frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9} \qquad \qquad \qquad \dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

(1)

 $n \geq 2$ のとき

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + n^2 x^2 - nx + 3^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_n x^2 + b_n x + c_n = (a_{n-1} + n^2)x^2 + (b_{n-1} - n)x + c_{n-1} + 3^{n-1}$$

$$\therefore \begin{cases} a_n = a_{n-1} + n^2 \\ b_n = b_{n-1} - n \\ c_n = c_{n-1} + 3^{n-1} \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

(2)

 $f_1(x) = x^2 - x + 1$ より, $n=1$ のとき $a_1=1, b_1=-1, c_1=1$ である。 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_{n-1} + n^2$$

$$= a_1 + \sum_{k=2}^n k^2$$

$$= 1 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 1$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \cdots(\text{答})$$

$$b_n = b_{n-1} - n$$

$$= b_1 - \sum_{k=2}^n k$$

$$= -1 - \frac{1}{2}n(n+1) + 1$$

$$= -\frac{1}{2}n(n+1) \quad \cdots(\text{答})$$

$$c_n = c_{n-1} + 3^{n-1}$$

$$= c_1 + \sum_{k=2}^n 3^{k-1}$$

$$= 1 + 3 \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1}$$

$$= \frac{3^n - 1}{2} \quad \cdots(\text{答})$$

これらは $n=1$ でも成立する。

(3)

 $n=1$ のとき

$$3^n = 3 > 2 = n+1$$

より成り立つ。

 $n=k$ のとき $3^n > n+1$, つまり $3^k > k+1$ と仮定すると, $n=k+1$ のとき

$$3^n = 3^{k+1}$$

$$= 3 \times 3^k$$

$$> 3(k+1)$$

$$= 3k+3$$

$$> (k+1)+1$$

よって $n=k+1$ でも $3^n > n+1$ が成立する。以上から数学的帰納法より $3^n > n+1$ が示された。 $\cdots(\text{証明終})$

(4)

$$f_n(x) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)x^2 - \frac{1}{2}n(n+1)x + \frac{3^n - 1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \left\{ x - \frac{3}{2(2n+1)} \right\}^2 + \frac{3^n - 1}{2}$$

$$- \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \left\{ \frac{3}{2(2n+1)} \right\}^2$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \left\{ x - \frac{3}{2(2n+1)} \right\}^2 + \frac{3^n - 1}{2} - \frac{3n(n+1)}{8(2n+1)}$$

$$> \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \left\{ x - \frac{3}{2(2n+1)} \right\}^2 + \frac{(n+1) - 1}{2} - \frac{3n(n+1)}{8(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \left\{ x - \frac{3}{2(2n+1)} \right\}^2 + \frac{5n^2 + n}{8(2n+1)} > 0$$

よってすべての自然数 n に対して, $f_n(x)=0$ は実数解をもたない。 $\cdots(\text{証明終})$

(1)

 $y=x$ に関する対称移動

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

…(答)

回転角 θ の回転移動

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

…(答)

(2)

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

…(答)

(3)

$$\begin{aligned} A(\alpha)A(\beta) &= \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \beta & \cos \beta \\ \cos \beta & \sin \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) & \cos(\alpha - \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これは原点を中心とする回転移動を表す行列であり、その回転角は $\alpha - \beta$

…(答)

(4)

 $A(\alpha)A(\beta)$ は回転角

$$\left(\frac{4}{9}\pi - \frac{5}{6}\pi \right) = -\frac{7}{18}\pi$$

の回転移動となるので、 $\{A(\alpha)A(\beta)\}^n$ が E となるのは

$$-\frac{7n}{18}\pi = 2k\pi$$

のときである。ただし k は整数とする。これを整理すると

$$n = -\frac{36}{7}k$$

よってこれを与える最小の n は 36 である。

…(答)

(1)

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \text{ より}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

よって求める接線は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

$$= (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}(x - t) + te^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$= (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}x + t^3e^{-\frac{t^2}{2}}$$

…(答)

(2)

(1)で求めた接線の切片から

$$g(t) = t^3e^{-\frac{t^2}{2}}$$

 $y = g(x) = x^3e^{-\frac{x^2}{2}}$ について調べる。

$$g'(x) = (3x^2 - x^4)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= x^2(3 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

であるから、次の増減表を得る。

x	…	$-\sqrt{3}$	…	0	…	$\sqrt{3}$	…
$g'(x)$	—	0	+	0	+	0	—
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$

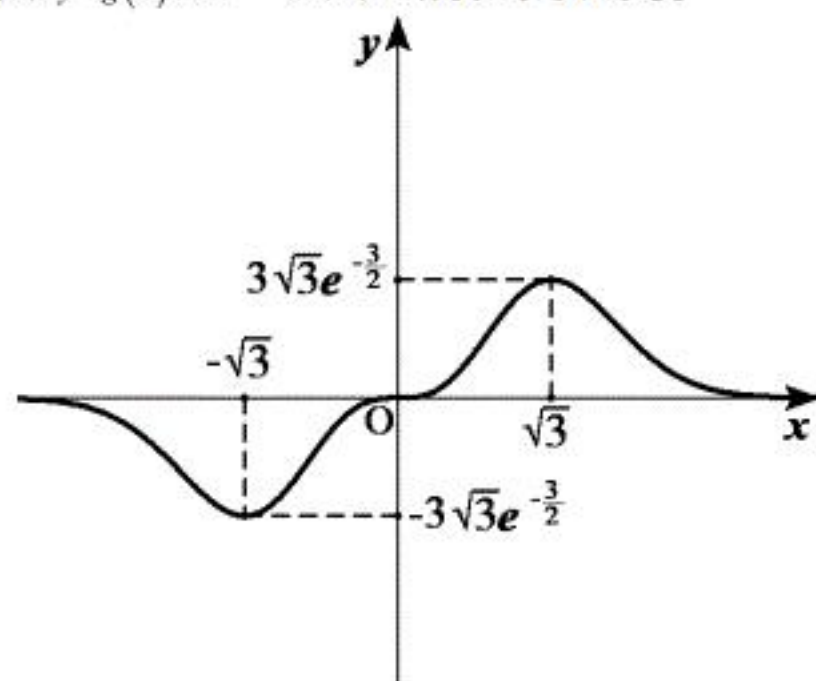
また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

$$g(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$g(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$$

以上より $y = g(x) = x^3e^{-\frac{x^2}{2}}$ のグラフは次のようになる。

…(答)

(3)

 $g(x) = p$ をとりうる x が 2 つ存在すればいいので、(2)のグラフから

$$g(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} < p < 0, 0 < p < g(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore -3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} < p < 0, 0 < p < 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$$

…(答)

(1)

$f''(x) > 0$ なので $f'(x)$ は増加関数より, $0 \leq x < 1$ において

$$f'(0) \leq f'(x) < f'(1)$$

また $f'(0) > 0$ より, $0 \leq x < 1$ で $f'(x) > 0$ である。よって $0 \leq x < 1$ において $f(x)$ は増加関数なので

$$f(0) \leq f(x) < f(1) = 1$$

が成り立つ。

…(証明終)

(2)

$n=1$ のとき $x_1 = 0$ より, $0 \leq x_n < 1$ を満たす。

$0 \leq x_n < 1$ とすると, (1)より

$$0 < f(0) \leq f(x_n) < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < x_{n+1} < 1$$

$$\therefore 0 \leq x_{n+1} < 1$$

より数学的帰納法より, 全ての自然数 n で $0 \leq x_n < 1$ である。

したがって

$$0 < 1 - x_{n+1}$$

また平均値の定理から

$$\frac{f(1) - f(x_n)}{1 - x_n} = f'(k)$$

となる k が $x_n < k < 1$ に存在する。 $f'(k) < f'(1)$ が成り立つから,

$$\frac{f(1) - f(x_n)}{1 - x_n} = f'(k) < f'(1)$$

$$f(1) - f(x_n) < f'(1)(1 - x_n)$$

$$1 - x_{n+1} < f'(1)(1 - x_n)$$

以上より

$$0 < 1 - x_{n+1} < f'(1)(1 - x_n)$$

が示された。

…(証明終)

(3)

(2)より

$$0 < 1 - x_{n+1} < f'(1)(1 - x_n)$$

$$< f'(1) \times f'(1)(1 - x_{n-1})$$

$$< \{f'(1)\}^2 \times f'(1)(1 - x_{n-2})$$

$$< \dots$$

$$\therefore 0 < 1 - x_{n+1} < \{f'(1)\}^n (1 - x_1)$$

$0 < f'(1) < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f'(1)\}^n (1 - x_1) = 0$$

より, はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_{n+1}) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

よって題意は示された。

…(証明終)