

(前期日程)

# 平成21年度 数 学

## 問題の選択方法

教育学部 } の受験者は [1], [2], [3], [4] の4問  
農学部 }

理学部 } の受験者は [4], [5], [6], [7], [8] の5問  
工学部 }

医学部 の受験者は [4], [6], [7], [8], [9] の5問

を解答すること。

## 注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は、18 ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。

- 3 解答は、すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。
- 4 問題紙の余白は下書きに使用してよい。

|   |
|---|
| 1 |
|---|

(教育学部・農学部)

次の問に答えよ。

- (1) 方程式  $x^2 + 2|x - 1| - 5 = 0$  を解け。
- (2)  $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$  を計算せよ。
- (3)  $i^{2009}$  を計算せよ。ただし、 $i$  は虚数単位である。また、 $x^{2009}$  を  $x^2 + 1$  で割ったときの余りを求めよ。
- (4)  $84^{12}$  のけた数を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.301$ ,  $\log_{10} 3 = 0.477$ ,  $\log_{10} 7 = 0.845$  とする。
- (5) 平面上の4点  $(0, 1)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(a, b)$  を頂点とする四角形が平行四辺形となるような座標  $(a, b)$  をすべて求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

表面に1から6までの数字を1つずつ書いた6つの球がある。これらの球を箱の中に入れ、同時に2つの球を取り出し、その数字の和を得点とする試行を行う。

- (1) 得点が次のようになる確率をそれぞれ求めよ。
  - (i) 10
  - (ii) 9以上
  
- (2) AさんとBさんがこの球を使ってゲームをする。箱の中から同時に2つの球を取り出す試行を行い、その得点を記録し、またもとに戻して相手方にかわる。各自の得点を加算していき、どちらかの合計得点が20以上になるまでこの試行を繰り返し、先に20以上になった方を勝者とする。
  - (i) Aさんからこのゲームを始めるとき、Aさんにとって2回目の試行でAさんが勝つ確率を求めよ。
  - (ii) Bさんからこのゲームを始めるとき、Aさんにとって2回目の試行でAさんが勝つ確率を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

3

(教育学部・農学部)

$k \neq \pm 1$  とする。2 直線  $\ell$ ,  $m$  を

$$\ell : x + ky = 3, \quad m : kx + y = 3$$

で定め、それらの交点を  $P$  とする。

- (1) 点  $P$  の座標を  $k$  を用いて表せ。
- (2) 放物線  $y = ax^2$  が点  $P$  を通るとき、 $a$  を  $k$  を用いて表せ。
- (3) 放物線  $y = ax^2$  が点  $P$  で直線  $\ell$  と接するとする。
  - (i)  $k$  の値を求めよ。
  - (ii) 放物線  $y = ax^2$ , 直線  $m$  および  $y$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

4

(教育学部・農学部・理学部・工学部・医学部)

3点  $A(0, -1, 3)$ ,  $B(2, 1, 4)$ ,  $C(1, -3, 5)$  と実数  $\theta$  に対して,  
点  $P$  は

$$\overrightarrow{AP} = (\sin \theta) \overrightarrow{AB} + (\cos \theta) \overrightarrow{AC}$$

をみたすものとする。

- (1) 大きさ  $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\overrightarrow{AC}|$  および内積  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  の値を求めよ。
- (2)  $|\overrightarrow{AP}|$  は  $\theta$  の値に関係なく一定であることを示せ。
- (3) 点  $P$  を点  $B$  および点  $C$  と異なる点とすると、 $\triangle PBC$  の面積の最大値を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

5

(理学部・工学部)

次の問に答えよ。

- (1)  $i^{2009}$  を計算せよ。ただし、 $i$  は虚数単位である。また、 $x^{2009}$  を  $x^2 + 1$  で割ったときの余りを求めよ。
- (2)  $84^{12}$  のけた数を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.301$ ,  $\log_{10} 3 = 0.477$ ,  $\log_{10} 7 = 0.845$  とする。
- (3) 平面上の4点  $(0, 1)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(a, b)$  を頂点とする四角形が平行四辺形となるような座標  $(a, b)$  をすべて求めよ。
- (4) 極限值  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 - x + 1})$  を求めよ。
- (5) 次の定積分を求めよ。
- (i)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$
- (ii)  $\int_1^e x^2 \log x dx$

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

自然数  $n$  に対して、関数  $f_n(x)$  を帰納的に

$$f_1(x) = x^2 - x + 1,$$

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + n^2 x^2 - nx + 3^{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

で定める。

- (1) 関数  $f_n(x)$  を係数  $a_n, b_n, c_n$  を用いて  $f_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$  と表す。  
 $n \geq 2$  のとき、 $a_n, b_n, c_n$  をそれぞれ  $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$  および  $n$  を用いて表せ。
- (2) (1) における数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  および  $\{c_n\}$  の一般項を求めよ。
- (3) 数学的帰納法を用いて、すべての自然数  $n$  に対して  $3^n > n + 1$  が成り立つことを示せ。
- (4) すべての自然数  $n$  に対して、 $x$  についての方程式  $f_n(x) = 0$  は実数解をもたないことを示せ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

$\theta$  を実数とし,  $xy$  平面上で, まず直線  $y = x$  に関する対称移動を行い, その後原点のまわりの回転角  $\theta$  の回転移動を行う。この移動の合成を表す行列を  $A(\theta)$  とする。

- (1) 直線  $y = x$  に関する対称移動, および原点のまわりの回転角  $\theta$  の回転移動を表す行列をそれぞれ書け。ただし, 答えのみでよい。
- (2)  $A(\theta)$  を求めよ。
- (3) 実数  $\alpha, \beta$  に対して, 行列の積  $A(\alpha)A(\beta)$  は原点のまわりの回転移動を表す行列であることを示し, 回転角を  $\alpha, \beta$  で表せ。
- (4)  $\alpha = \frac{4}{9}\pi, \beta = \frac{5}{6}\pi$  のとき  $\{A(\alpha)A(\beta)\}^n = E$  となる最小の自然数  $n$  を求めよ。ただし,  $E$  は単位行列とする。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$  とする。 $y$  軸上の点  $P(0, p)$  より、曲線  $y = f(x)$  に異なる 2 本の接線が引けるための  $p$  のとり得る値の範囲を求めたい。次の問に答えよ。ただし、必要があれば、自然数  $k$  に対して  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$  となることを用いてもよい。

- (1) 曲線  $y = f(x)$  上の点  $(t, f(t))$  における接線の方程式を求めよ。
- (2) (1) で求めた接線の  $y$  切片を  $g(t)$  とする。関数  $y = g(x)$  の増減、極値を調べ、そのグラフをかけ。ただし、グラフの凹凸は調べなくてもよい。
- (3)  $p$  のとり得る値の範囲を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

関数  $f(x)$  は第 2 次導関数を持ち、条件

- (i)  $f(0) > 0$ ,  $f(1) = 1$
- (ii)  $f'(0) > 0$ ,  $0 < f'(1) < 1$
- (iii) すべての実数  $x$  に対して  $f''(x) > 0$

をすべてみたすものとする。また、数列  $\{x_n\}$  を帰納的に

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

- (1)  $0 \leq x < 1$  のとき

$$f(0) \leq f(x) < 1, \quad f'(0) \leq f'(x) < f'(1)$$

であることを示せ。

- (2) すべての自然数  $n$  に対して

$$0 < 1 - x_{n+1} < f'(1)(1 - x_n)$$

が成り立つことを示せ。

- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$  であることを示せ。