

1

(1)

$$\begin{aligned}4x^2-4x-15 < 0 \\ \Leftrightarrow (2x-5)(2x+3) < 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2-2x \geq 0 \\ \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq 0, \ 2 \leq x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①, ②の共通範囲が答となるので,

$$-\frac{3}{2} < x \leq 0, \ 2 \leq x < \frac{5}{2}$$

(答) $-\frac{3}{2} < x \leq 0, \ 2 \leq x < \frac{5}{2}$

(2)

余弦定理を用いると,

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + CA^2 - 2AB \cdot CA \cos \angle A \\ \Leftrightarrow 1^2 &= AB^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow 0 &= AB^2 - 3AB + 2 \\ \Leftrightarrow 0 &= (AB-1)(AB-2) \\ \Leftrightarrow AB &= 1, 2\end{aligned}$$

ここで, $AB=1$ のとき

$$\begin{aligned}\cos \angle B &= \frac{BC^2 + AB^2 - CA^2}{2BC \cdot AB} \\ &= \frac{1+1-3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となり, $\angle B$ は鈍角なので, 三角形 ABC は確かに鈍角三角形となる。

また, $AB=2$ のとき

$$BC^2 + CA^2 = AB^2 = 4$$

となり, 三角形 ABC は $\angle C=90^\circ$ の直角三角形となるので, 鈍角三角形ではない。

以上より, $AB=1$ である。

(答) $AB=1$

(3)

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= (1-s)\overline{OA} + s\overline{OB} \\ &= (1-s, s, 0) \\ \overline{OQ} &= (1-s)\overline{OC} + s\overline{OA} \\ &= (s, 0, 1-s)\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}\overline{OP} \cdot \overline{OQ} &= (1-s, s, 0) \cdot (s, 0, 1-s) \\ &= s - s^2\end{aligned}$$

(答) $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = s - s^2$

(4)

$$\begin{aligned}\left(\log_2 \sqrt{x} + \log_2 x^2 + \log_2 \frac{1}{x}\right)^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\log_2 x + 2\log_2 x - \log_2 x\right)^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 x &= \pm 3 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= \pm 2 \\ \Leftrightarrow x &= 4, \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(答) $x=4, \frac{1}{4}$

(5)

等差数列 $1, a, b, c$ の公差を d , 等比数列 $a, b, 1, c$ の公比を $r (r \neq 0)$ とおくと,

$$\begin{aligned}a=1+d &= \frac{1}{r^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b=1+2d &= \frac{1}{r} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ c=1+3d &= r \quad \cdots \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

と表せる。①, ②より

$$\begin{aligned}1+d &= (1+2d)^2 \\ \Leftrightarrow 4d^2 + 3d &= 0 \\ \Leftrightarrow d &= 0, -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

また, ②, ③より

$$\begin{aligned}1+2d &= \frac{1}{1+3d} \\ \Leftrightarrow 6d^2 + 5d &= 0 \\ \Leftrightarrow d &= 0, -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

以上より, $d=0$ である。このとき $a=b=c=1$ となり, 確かに 数列 $1, a, b, c$ は等差数列, 数列 $a, b, 1, c$ は等比数列となっている。

(証明終)

2

(1)

$y=a(x+2)$ を $x^2+y^2-4x=0$ に代入すると、

$$\begin{aligned} x^2+a^2(x+2)^2-4x &=0 \\ \Leftrightarrow (1+a^2)x^2+4(a^2-1)x+4a^2 &=0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。①が、相異なる2つの実数解を持てばよい。

①の x^2 の係数が0でないことに注意すると、求める条件は、①の判別式を D として

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 4(a^2-1)^2-4a^2(1+a^2) > 0 \\ \Leftrightarrow -12a^2+4 &> 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

(答) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$

(2)

P, Q の x 座標をそれぞれ α, β とすると R の x 座標は $\frac{\alpha+\beta}{2}$ である。

ここで、 α, β は①の解なので、解と係数の関係を用いると

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= -\frac{4(a^2-1)}{a^2+1} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} &= -\frac{2(a^2-1)}{a^2+1} \end{aligned}$$

また、R は $y=a(x+2)$ 上にあるので、 y 座標は

$$a\left\{-\frac{2(a^2-1)}{a^2+1}+2\right\}=\frac{4a}{a^2+1}$$

以上から

$$\text{R:}\left(-\frac{2(a^2-1)}{a^2+1}, \frac{4a}{a^2+1}\right)$$

(答) $\text{R:}\left(-\frac{2(a^2-1)}{a^2+1}, \frac{4a}{a^2+1}\right)$

(3)

求める距離は

$$\begin{aligned} \sqrt{\left\{-\frac{2(a^2-1)}{a^2+1}\right\}^2+\left(\frac{4a}{a^2+1}\right)^2} &= \sqrt{\frac{4(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

(答) 2

(4)

R の x 座標は

$$-\frac{2(a^2-1)}{a^2+1}=\frac{4}{a^2+1}-2$$

と変形できる。 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$ より、 $1 \leq a^2+1 < \frac{4}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{4}{\frac{4}{3}}-2 < \frac{4}{a^2+1}-2 \leq \frac{4}{1}-2 \\ \therefore 1 < \frac{4}{a^2+1}-2 \leq 2 \end{aligned}$$

これと(3)の答より、R の軌跡は、原点を中心とする半径2の円上で $1 < x \leq 2$ の部分である。

(答) 原点を中心とする半径2の円上で $1 < x \leq 2$ の部分

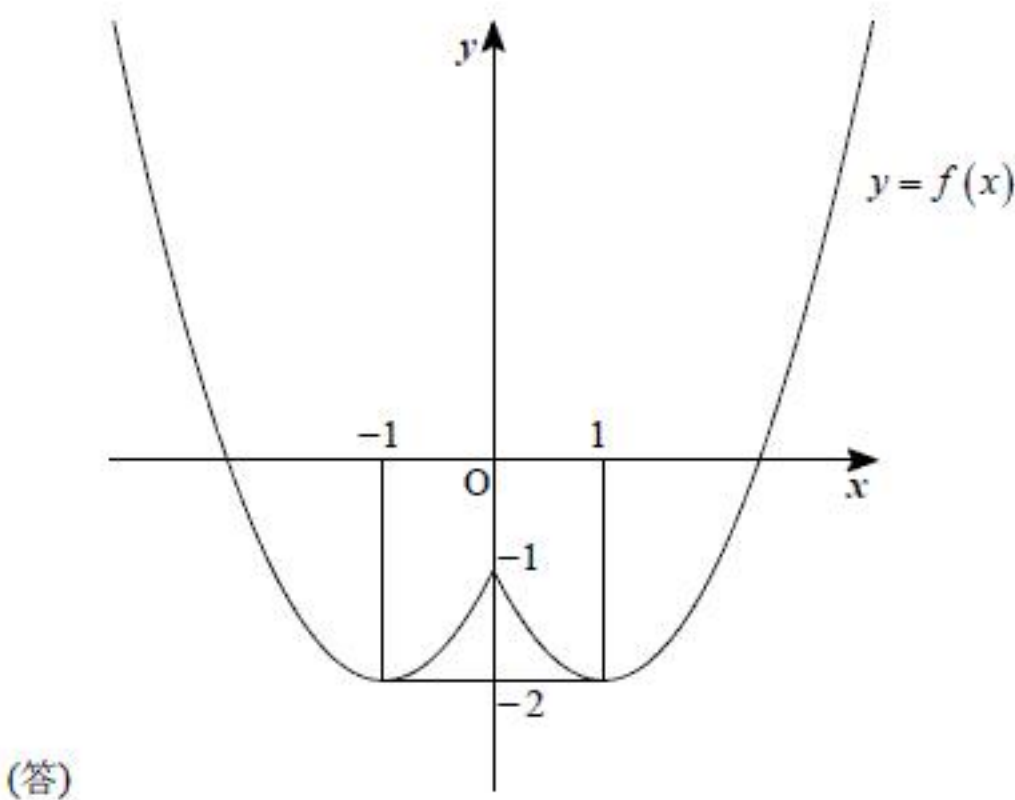
3

(1)

$$x < 0 \text{ のとき, } f(x) = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$$

$$0 \leq x \text{ のとき, } f(x) = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$$

よって, $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。



(答)

(2)

[1] $x < 0$ のとき

$$x^2 + 2x - 1 = 3x + 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0$$

$x < 0$ なので,

$$x = -2, y = 3 \cdot (-2) + 5 = -1$$

[2] $0 \leq x$ のとき

$$x^2 - 2x - 1 = 3x + 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x+1) = 0$$

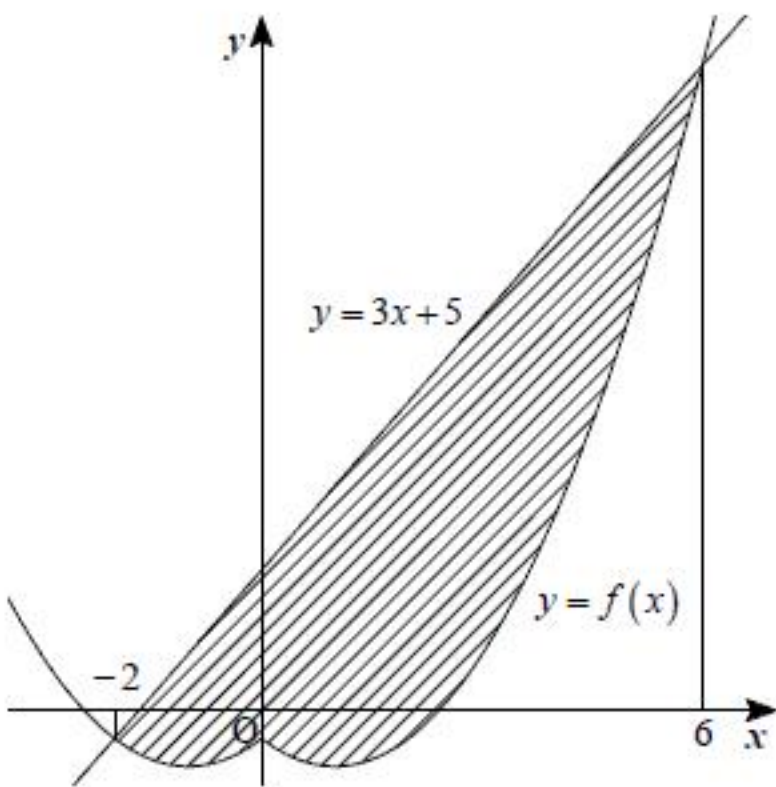
$0 \leq x$ なので,

$$x = 6, y = 3 \cdot 6 + 5 = 23$$

以上より, 交点は $(-2, -1), (6, 23)$

(答) $(-2, -1), (6, 23)$

(3)



求めるのは, 図斜線部の面積であるから

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 \{(3x+5) - (x^2+2x-1)\} dx + \int_0^6 \{(3x+5) - (x^2-2x-1)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_0^6 \\ &= \frac{22}{3} + 54 \\ &= \frac{184}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{184}{3}$

(1)

左から 1 番目のカードに書かれた数が 0 である確率は $\frac{4}{10}$ である。

このもとで、左から 2 番目のカードに書かれた数が 0 である確率は $\frac{3}{9}$ である。

左から 4 番目まで同様に考えると、求める確率は

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{210}$$

(答) $\frac{1}{210}$

(2)

右から 1 番目のカードに書かれた数が 4, 3, 2, 1, 0 である確率は、それぞれ

$\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}$ であるので、求める期待値は

$$4 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{2}{10} + 1 \times \frac{2}{10} + 0 \times \frac{4}{10} = \frac{13}{10}$$

(答) $\frac{13}{10}$

(3)

(i)

左から 2 番目のカードに書かれた数を b 、左から 3 番目のカードに書かれた数を c とすると、得点が 4 になるような (a, b, c) の組み合わせは次の通りである。

$$a = 4, b = 3, c = 2, 1, 0$$

$$a = 4, b = 2, c = 3, 1, 0$$

$$a = 4, b = 1, c = 3, 2, 0$$

$$a = 4, b = 0, c = 3, 2, 1$$

よって、求める確率は

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{8} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} + \frac{1}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{7}{90}$$

(答) $\frac{7}{90}$

(ii)

得点が 3 になるような (a, b, c) の組み合わせは次の通りである。

$$a = 3, b = 2, c = 1, 0$$

$$a = 3, b = 1, c = 2, 0$$

$$a = 3, b = 0, c = 2, 1$$

よって、得点が 3 になる確率は

$$\frac{1}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{18}$$

また、得点が 2 になるような (a, b, c) の組み合わせは次の通りである。

$$a = 2, b = 1, c = 0$$

$$a = 2, b = 0, c = 1$$

よって、得点が 2 になる確率は

$$\frac{2}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{2}{45}$$

また、得点が 1 になる確率は 0 である。

以上より、求める期待値は

$$4 \times \frac{7}{90} + 3 \times \frac{1}{18} + 2 \times \frac{2}{45} = \frac{17}{30}$$

(答) $\frac{17}{30}$

5

(1)

$$\begin{aligned}
 &4x^2-4x-15<0 \\
 &\Leftrightarrow (2x-5)(2x+3)<0 \\
 &\Leftrightarrow -\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 &x^2-2x\geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x(x-2)\geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x\leq 0, \ 2\leq x \quad \dots\dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

①, ②の共通範囲が答となるので,

$$-\frac{3}{2}<x\leq 0, \ 2\leq x<\frac{5}{2}$$

(答) $-\frac{3}{2}<x\leq 0, \ 2\leq x<\frac{5}{2}$

(2)

$y>0$ なので,

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{y}<\frac{1}{3} \\
 &\therefore x>3 \ (\because x>0)
 \end{aligned}$$

また, $x\leq y$ なので

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\leq \frac{2}{x} \\
 &\therefore x\leq 6
 \end{aligned}$$

よって, $x=6,5,4$ の場合を調べればよい。

[1] $x=6$ のとき

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{y}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6} \\
 &\Leftrightarrow y=6
 \end{aligned}$$

[2] $x=5$ のとき

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{y}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5} \\
 &\Leftrightarrow y=\frac{15}{2}
 \end{aligned}$$

これは自然数でないので, 不適。

[3] $x=4$ のとき

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{y}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \\
 &\Leftrightarrow y=12
 \end{aligned}$$

以上から $(x,y)=(6,6),(4,12)$

(答) $(x,y)=(6,6),(4,12)$

(3)

$$\begin{aligned}
 &\left(\log_2 \sqrt{x}+\log_2 x^2+\log_2 \frac{1}{x}\right)^2=9 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\log_2 x+2\log_2 x-\log_2 x\right)^2=9 \\
 &\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 x=\pm 3 \\
 &\Leftrightarrow \log_2 x=\pm 2 \\
 &\Leftrightarrow x=4,\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

(答) $x=4,\frac{1}{4}$

(4)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP} &= (1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB} \\
 &= (1-s, s, 0) \\
 \overrightarrow{OQ} &= (1-s)\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OA} \\
 &= (s, 0, 1-s)
 \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} &= (1-s, s, 0)\cdot(s, 0, 1-s) \\
 &= s-s^2
 \end{aligned}$$

(答) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=s-s^2$

(5)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+a)\cos 2x\,dx &= \left[\frac{1}{2}(x+a)\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}(x+a)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\pi}{8} + \frac{a}{2} - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

これが $\frac{\pi}{8}$ に等しいので,

$$a=\frac{1}{2}$$

(答) $a=\frac{1}{2}$

(1)

(i)

順次、漸化式に代入すると、

$$a_2 = \frac{a_1}{1-b_1^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$b_2 = a_2 b_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{1-b_2^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$b_3 = a_3 b_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{2}{3}, b_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, b_3 = \frac{1}{4}$$

(ii)

$$a_n = \frac{n}{n+1}, b_n = \frac{1}{n+1} \text{ と推定できる。}$$

$n=1$ のとき、これらは成立する。

$n=k$ (k は自然数) のとき成立すると仮定すると

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{1-b_k^2} = \frac{\frac{k}{k+1}}{1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^2} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$b_{k+1} = a_{k+1} b_k = \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+2}$$

となるので、 $n=k+1$ のときも成立する。

以上、数学的帰納法によって、任意の自然数 n において $a_n = \frac{n}{n+1}, b_n = \frac{1}{n+1}$ が成り立つこと

が示された。

(証明終)

(2)

(i)

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= a_{n+1} + a_{n+1} b_n \\ &= a_{n+1} (1 + b_n) \\ &= \frac{a_n}{1-b_n^2} (1 + b_n) \\ &= \frac{a_n}{1-b_n} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{a_n}{1-b_n}$$

(ii)

任意の自然数 n に対して $a_n + b_n = 1$ が成り立つことを、数学的帰納法によって示す。

$a_1 + b_1 = 1$ なので、 $n=1$ のとき成り立つ。

$n=k$ (k は自然数) のとき成立すると仮定すると、

$$\begin{aligned} a_{k+1} + b_{k+1} &= \frac{a_k}{1-b_k} \\ &= \frac{1-b_k}{1-b_k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるので、 $n=k+1$ のときも成立する。

以上、数学的帰納法によって、任意の自然数 n において $a_n + b_n = 1$ が成り立つことが示された。

$$(\text{答}) \quad a_n + b_n = 1$$

(1)

l 上の任意の点 S の座標は、 s を実数として $(s, 2s-1)$ と表せる。

点 S は f によって

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 2s-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+2b)s-b \\ 4s+1 \end{pmatrix}$$

に移される。この点は l 上にあるので、任意の s に対して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} 4s+1 &= 2\{(a+2b)s-b\}-1 \\ \Leftrightarrow (4-2a-4b)s+2+2b &= 0 \end{aligned}$$

これが任意の s に対して成り立つ条件は、

$$\begin{aligned} 4-2a-4b &= 0 \quad \text{かつ} \quad 2+2b=0 \\ \Leftrightarrow a=4, b &=-1 \end{aligned}$$

(答) $a=4, b=-1$

(2)

点 P の座標は、 p を実数として $(p, 2p-1)$ と表せる。

点 P は f によって P 自身に移されるので

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 2p-1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p \\ 2p-1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2p+1 \\ 4p+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p \\ 2p-1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow p &= -1 \end{aligned}$$

よって、点 P の座標は $(-1, -3)$ である。

(答) $(-1, -3)$

(3)

m が P を通るので、 m が y 軸に平行であると仮定すると、 m の方程式は $x=-1$ である。

このとき、 m 上の任意の点は t を実数として $(-1, t)$ と表せる。これらの点は、 f によって

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-t \\ -6-t \end{pmatrix}$$

に移されるので、条件②を満たさず不適。

したがって m は y 軸に平行でないので、 m の方程式は k を実数として $y=k(x+1)-3$ と表せる。

このとき、 m 上の任意の点は t を実数として $(t, (t+1)k-3)$ と表せる。

これらの点は、 f によって

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ (t+1)k-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t-(t+1)k+3 \\ 6t-(t+1)k+3 \end{pmatrix}$$

に移される。この点は m 上にあるので、任意の t に対して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} 6t-(t+1)k+3 &= k\{4t-(t+1)k+3+1\}-3 \\ \Leftrightarrow (k^2-5k+6)(t+1) &= 0 \end{aligned}$$

これが任意の t に対して成り立つ条件は、

$$\begin{aligned} k^2-5k+6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-2)(k-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= 2, 3 \end{aligned}$$

さらに、 m は l と異なるので $k=3$ である。

よって、 m の方程式は

$$y=3(x+1)-3 \Leftrightarrow y=3x$$

(答) $y=3x$

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2xe^{-\frac{2}{3}x^3} + x^2 \left(-2x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3} \right) \\
 &= 2x(1-x^3)e^{-\frac{2}{3}x^3}
 \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0,1$$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$e^{-\frac{2}{3}}$	$\searrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x=0$ で極小値 0 をとり、 $x=1$ で極大値 $e^{-\frac{2}{3}}$ をとる。

(答) 極小値 0 ($x=0$)、極大値 $e^{-\frac{2}{3}}$ ($x=1$)

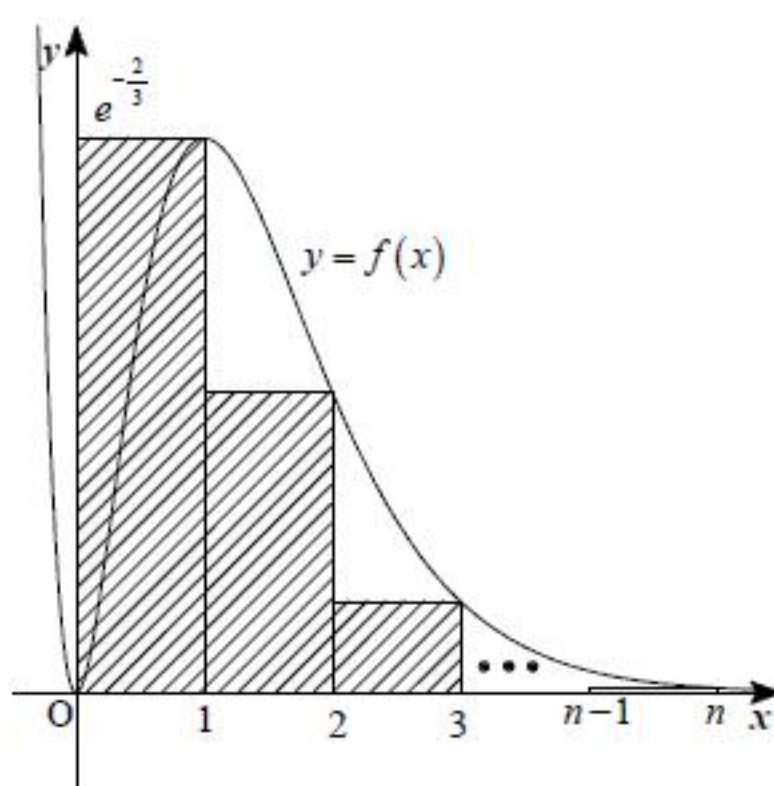
(2)

$$\begin{aligned}
 \int_1^n f(x) dx &= \int_1^n x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3} dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}x^3} \right]_1^n \\
 &= \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}n^3} \right)
 \end{aligned}$$

(答) $\int_1^n f(x) dx = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}n^3} \right)$

(3)

増減表と $x>0$ で $f(x)>0$ であることより、 $y=f(x)$ の概形は次図のようになり、 $\sum_{k=1}^n f(k)$ は、次図斜線部の面積に等しい。



[1] $n=1$ のとき

$$\sum_{k=1}^n f(k) = f(1) = e^{-\frac{2}{3}}$$

となり、確かに問の不等式は成り立つ。

[2] $n \geq 2$ のとき

グラフより、

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n f(k) &= f(1) + \sum_{k=2}^n f(k) \\
 &< e^{-\frac{2}{3}} + \int_1^n f(x) dx
 \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、(2)の答より

$$\int_1^n f(x) dx < \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}}$$

が成り立つことを用いると、

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n f(k) &< e^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}} \\
 &= \frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$

を得る。

以上より、任意の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^n f(k) < \frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}}$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(1)

まず、自然数 a が条件(★)を満たすならば、条件(☆)も満たすことを示す。
 $x^2 - ax + 2^n = 0$ は相異なる 2 つの実数解 α, β ($\alpha > \beta$) をもつので、判別式を D とおくと

$$D = a^2 - 2^{n+2} > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = 2^n$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= a^2 - 2^{n+2} \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{a^2 - 2^{n+2}} > 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

を得る。 $\alpha - \beta$ が整数なので、 p を自然数として

$$\sqrt{a^2 - 2^{n+2}} = p$$

と表せる。両辺を 2 乗して整理すると、

$$(a - p)(a + p) = 2^{n+2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。

ここで、 a, p はともに自然数であり、 $a - p$ と $a + p$ の偶奇が一致することに注意すると $a - p, a + p$ は互いに異なる正の偶数であることが分かる。 $x^2 - ax + 2^n = 0$ の 2 解は

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2^{n+2}}}{2} = \frac{a \pm p}{2}$$

であるから、 α, β は互いに異なる整数(自然数)であり、自然数 a が条件(☆)を満たすことが示された。

次に、自然数 a が条件(☆)を満たすならば、条件(★)も満たすことを示す。
 $x^2 - ax + 2^n = 0$ の 2 解 α, β は異なる整数であるから、 α, β は異なる実数でもあり、 $\alpha - \beta$ は整数となる。よって、自然数 a は条件(★)を満たす。

以上より、 $A = B$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

(i)

$A = B$ であり、(1)より自然数 a が条件(★)を満たすとき α, β はともに自然数であることから、 $x^2 - ax + 2^n = 0$ が異なる 2 つの自然数解 α, β をもつような自然数 a の集合を求めればよい。

[1] $n=1$ のとき

解と係数の関係より、

$$\alpha\beta = 2$$

$$\therefore (\alpha, \beta) = (1, 2), (2, 1)$$

$$a = \alpha + \beta = 3$$

よって、 $A = \{3\}$

[2] $n=2$ のとき

解と係数の関係より、

$$\alpha\beta = 4$$

$$\therefore (\alpha, \beta) = (1, 4), (4, 1) \quad (\because \alpha \neq \beta)$$

$$a = \alpha + \beta = 5$$

よって、 $A = \{5\}$

(答) $n=1$ のとき $A = \{3\}$, $n=2$ のとき $A = \{5\}$

(ii)

②を満たす自然数 a, p を求めると、

$$\begin{aligned} a - p &= 2^k, a + p = 2^{n+2-k} \\ \Leftrightarrow a &= 2^{n+1-k} + 2^{k-1}, p = 2^{n+1-k} - 2^{k-1} \end{aligned}$$

となる。ここで p が正であることを考慮すると、

n が偶数のとき $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ であり、 n が奇数のとき $k = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ である。

このとき、

$$\frac{da}{dk} = \log 2 (-2^{n+1-k} + 2^{k-1}) = -p \log 2 < 0$$

となるので、 a は k について単調減少である。

よって、 a は $k=1$ のときに最大となり、最大値は $2^n + 1$ である。

(答) $2^n + 1$

(iii)

[1] n が偶数のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (2^{n+1-k} + 2^{k-1}) &= 2^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 - 2^{\frac{n}{2}}}{1 - 2} \\ &= 2^{n+1} - 2^{\frac{n}{2}} - 1 \end{aligned}$$

[2] n が奇数のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} (2^{n+1-k} + 2^{k-1}) &= 2^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 - 2^{\frac{n+1}{2}}}{1 - 2} \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

(答) n が偶数のとき $2^{n+1} - 2^{\frac{n}{2}} - 1$, n が奇数のとき $2^{n+1} - 1$