

(前期日程)

平成22年度 数 学

問題の選択方法

教育学部 } の受験者は ①, ②, ③, ④ の 4 問
農 学 部 }
理学部 } の受験者は ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ の 5 問
工学部 }
医学部 の受験者は ④, ⑥, ⑦, ⑧, ⑨ の 5 問
を解答すること。

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は、18 ページあります。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答は、すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。
- 4 問題紙の余白は下書きに使用してよい。

1

(教育学部・農学部)

次の問いに答えよ。

- (1) 次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 15 < 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

- (2) 鈍角三角形 ABC において、 $BC = 1$ ， $CA = \sqrt{3}$ ， $\angle A = 30^\circ$ であるとき、
AB の長さを求めよ。

- (3) 原点 O，および 3 点 $A(1, 0, 0)$ ， $B(0, 1, 0)$ ， $C(0, 0, 1)$ がある。
 $0 < s < 1$ に対して、線分 AB，線分 CA を $s : (1 - s)$ に内分する点を、それぞれ P，Q とするとき、内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ を s を用いて表せ。

- (4) 方程式 $\left(\log_2 \sqrt{x} + \log_2 x^2 + \log_2 \frac{1}{x}\right)^2 = 9$ を解け。

- (5) 数列 $1, a, b, c$ はこの順に等差数列であり、数列 $a, b, 1, c$ はこの順に等比数列であるとする。このとき、 $c = 1$ であることを示せ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

2

(教育学部・農学部)

直線 $y = a(x + 2)$ と円 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ は異なる 2 点 P, Q で交わっているとする。また, 線分 PQ の中点を R とする。

- (1) 定数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) R の座標を a を用いて表せ。
- (3) 原点 O と点 R の距離を求めよ。
- (4) a の値が (1) で求めた範囲を動くとき, 点 R の軌跡を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

3

(教育学部・農学部)

$f(x) = x^2 - 2|x| - 1$ とする。

- (1) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 3x + 5$ の交点の座標を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 3x + 5$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

4の数字が書かれたカードが1枚, 3の数字が書かれたカードが1枚, 2の数字が書かれたカードが2枚, 1の数字が書かれたカードが2枚, 0の数字が書かれたカードが4枚ある。これら合計10枚のカードをよくまぜて, 左から右に一列に並べる。

(1) 左から4番目までの4枚のカードに書かれた数がすべて0となる確率を求めよ。

(2) 右から1番目のカードに書かれた数の期待値を求めよ。

(3) 左から3番目までの3枚のカードに書かれた3つの数について, 次の条件

①, ②を考える。

① 3つの数がすべて異なる。

② 3つの数の中で, 左から1番目のカードに書かれた数 a が最大である。

条件①, ②の両方が同時にみたされた場合の得点を a とし, それ以外の場合の得点を0とする。

(i) 得点が4となる確率を求めよ。

(ii) 得点の期待値を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

5

(理学部・工学部)

次の問いに答えよ。

- (1) 次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 15 < 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

- (2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ と $x \leq y$ の両方をみたす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

- (3) 方程式 $\left(\log_2 \sqrt{x} + \log_2 x^2 + \log_2 \frac{1}{x}\right)^2 = 9$ を解け。

- (4) 原点 O 、および 3 点 $A(1, 0, 0)$ 、 $B(0, 1, 0)$ 、 $C(0, 0, 1)$ がある。

$0 < s < 1$ に対して、線分 AB 、線分 CA を $s : (1 - s)$ に内分する点を、それぞれ P 、 Q とするとき、内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ を s を用いて表せ。

- (5) 等式 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + a) \cos 2x \, dx = \frac{\pi}{8}$ が成り立つとき、定数 a の値を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, すべての自然数 n について

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - b_n^2}, \quad b_{n+1} = a_{n+1} b_n$$

をみたしているとする。

(1) 初項が $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$ であるとする。

(i) a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ。

(ii) a_n, b_n を表す n の式を推定し, それらの推定が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

(2) 初項が $a_1 = \frac{1}{2010}, b_1 = \frac{2009}{2010}$ であるとする。

(i) $a_{n+1} + b_{n+1}$ を a_n, b_n で表せ。

(ii) $a_n + b_n$ を求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

7

(理学部・工学部・医学部)

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ の表す点の移動を f とし、 l を直線 $y = 2x - 1$ とする。ま

た、 f による l 上の点の像はすべて l 上にあり、 l 上のある点 P は f によって P 自身に移されるとする。

- (1) a, b の値を求めよ。
- (2) P の座標を求めよ。
- (3) 次の条件①, ②, ③をすべてみたす直線 m の方程式を求めよ。
 - ① m は P を通る。
 - ② f による m 上の点の像はすべて m 上にある。
 - ③ m は l と異なる。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

8

(理学部・工学部・医学部)

n を自然数とし, $f(x) = x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3}$ とする。

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_1^n f(x) dx$ を求めよ。

(3) 不等式 $\sum_{k=1}^n f(k) < \frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}}$ を証明せよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

n を自然数とし、集合 A, B を

$$A = \{a \mid a \text{ は条件}(\star)\text{をみたす自然数}\}$$

$$B = \{a \mid a \text{ は条件}(\star)\text{をみたす自然数}\}$$

で定める。ただし、条件 $(\star)$, $(\star)$ は次で与えられるとする。

$(\star)$ 2 次方程式 $x^2 - ax + 2^n = 0$ は異なる 2 つの実数解 α, β をもち、
 $\alpha - \beta$ は整数である。

$(\star)$ 2 次方程式 $x^2 - ax + 2^n = 0$ は異なる 2 つの整数解 α, β をもつ。

- (1) 2 つの集合 A, B について、 $A = B$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) (i) $n = 1, 2$ のそれぞれの場合について、集合 A を、要素を書き並べて表せ。
- (ii) 集合 A の要素のうち、最大の数を求めよ。
- (iii) 集合 A のすべての要素の和を求めよ。