

(1)

$\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ の分母と分子に $(2+\sqrt{3})-\sqrt{7}$ をそれぞれかけると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}} &= \frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}} \cdot \frac{(2+\sqrt{3})-\sqrt{7}}{(2+\sqrt{3})-\sqrt{7}} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{(2+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{4\sqrt{3}} \\ &= \frac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{12}\end{aligned}$$

となり、分母が有理化された。

$$(\text{答}) \quad \frac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{12}$$

(2)

$\sin \theta, \cos \theta$ は x についての2次方程式 $4x^2 - 3x + k = 0$ の2つの解となるため、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{4} \\ \sin \theta \cos \theta = \frac{k}{4} \end{cases}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}(\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \frac{9}{16} \\ \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{9}{16} \\ \therefore \sin \theta \cos \theta &= -\frac{7}{32}\end{aligned}$$

となるため、求める値は、

$$\begin{aligned}k &= 4 \sin \theta \cos \theta \\ &= 4 \cdot \left(-\frac{7}{32}\right) \\ &= -\frac{7}{8}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad k = -\frac{7}{8}$$

(3)

$$\begin{aligned}y &= 4^x - 2^{x+2} + 1 \\ &= (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 \\ &= (2^x - 2)^2 - 3\end{aligned}$$

となる。 $-1 \leq x \leq 3$ より、 $\frac{1}{2} \leq 2^x \leq 8$ であるため、関数 $y = 4^x - 2^{x+2} + 1$ は $2^x = 8$ 、すなわち、

$x = 3$ のとき、最大値 33 をとり、 $2^x = 2$ 、すなわち、 $x = 1$ のとき、最小値 -3 をとる。

(答) 最大値：33，最小値： -3

(4)

この直方体のサイコロを投げるとき、1, 6の目が出る確率はともに p 、2, 3, 4, 5の目が出る確率はいずれも q であるため、

$$2p + 4q = 1$$

が成り立つ。よって、得点の期待値を E とすると、

$$\begin{aligned}E &= 1 \cdot p + 2 \cdot q + 3 \cdot q + 4 \cdot q + 5 \cdot q + 6 \cdot p \\ &= 7p + 14q \\ &= \frac{7}{2} \cdot (2p + 4q) \\ &= \frac{7}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

となるため、得点の期待値は p, q の値によらずに一定である。

(証明終)

(1)

任意の自然数 n に対し、 $S_n = 4n - 3a_n$ であるため、 $S_1 = 4 - 3a_1$ となる。また、 $S_1 = a_1$ であるため、初項は、

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ \Leftrightarrow 4 - 3a_1 &= a_1 \\ \therefore a_1 &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_1 = 1$

(2)

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ が成り立つため、

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= a_{n+1} \\ \Leftrightarrow \{4(n+1) - 3a_{n+1}\} - (4n - 3a_n) &= a_{n+1} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 4 &= \frac{3}{4}(a_n - 4) \end{aligned}$$

となる。よって、数列 $\{a_n - 4\}$ は初項 $a_1 - 4 = -3$ 、公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列となるため、求める一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= -3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 4 \\ &= 4 - 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = 4 - 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} a_n &> \frac{35}{9} \\ \Leftrightarrow 4 - 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n &> \frac{35}{9} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n &< \frac{1}{36} \\ \Leftrightarrow \log_{10} \left(\frac{3}{4}\right)^n &< \log_{10} \frac{1}{36} \\ \Leftrightarrow -n(2\log_{10} 2 - \log_{10} 3) &< -2(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\ \therefore n &> \frac{2(\log_{10} 2 + \log_{10} 3)}{2\log_{10} 2 - \log_{10} 3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\log_{10} 2 = 0.301$ 、 $\log_{10} 3 = 0.477$ であるため、

$$\begin{aligned} \frac{2(\log_{10} 2 + \log_{10} 3)}{2\log_{10} 2 - \log_{10} 3} &= \frac{2 \cdot (0.301 + 0.477)}{2 \cdot 0.301 - 0.477} \\ &= \frac{1556}{125} \\ &= 12 + \frac{56}{125} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} a_n &> \frac{35}{9} \\ \Leftrightarrow n &> 12 + \frac{56}{125} \\ \therefore n &\geq 13 \end{aligned}$$

となるため、 $a_n > \frac{35}{9}$ となる最小の自然数 n は $n = 13$ である。

(答) $n = 13$

(1)

放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ と直線 $y = 2x + 4$ の交点の x 座標は、

$$x^2 + 2x - 3 = 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 7$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{7}$$

である。よって、放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ と直線 $y = 2x + 4$ の交点の座標は、

$$(\sqrt{7}, 4 + 2\sqrt{7}), (-\sqrt{7}, 4 - 2\sqrt{7})$$

である。

$$(\text{答}) (\sqrt{7}, 4 + 2\sqrt{7}), (-\sqrt{7}, 4 - 2\sqrt{7})$$

(2)

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

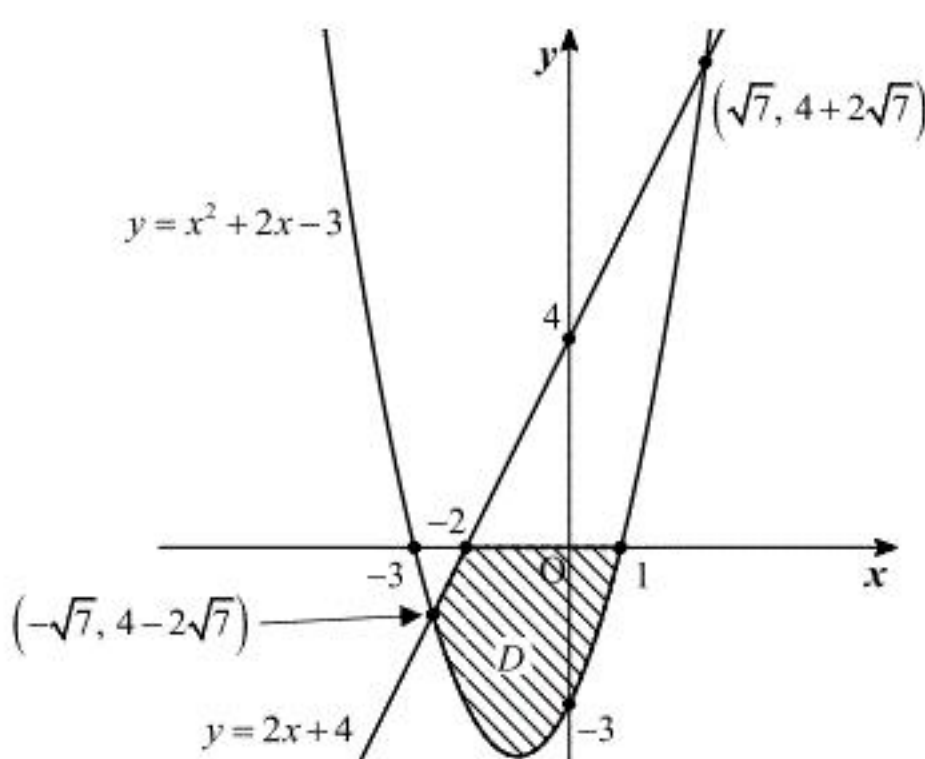
$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1, -3$$

$$2x + 4 = 0$$

$$\therefore x = -2$$

より、放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ と x 軸の交点は $(1, 0), (-3, 0)$ であり、直線 $y = 2x + 4$ と x 軸の交点は $(-2, 0)$ である。よって、領域 D は下図の斜線部のようになる。ただし、境界を含む。



上図より、領域 D の面積は、

$$\int_{-\sqrt{7}}^{-2} \{(2x+4) - (x^2+2x-3)\} dx + \int_{-2}^1 \{0 - (x^2+2x-3)\} dx$$

$$= \int_{-\sqrt{7}}^{-2} (-x^2 + 7) dx - \int_{-2}^1 (x^2 + 2x - 3) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 7x \right]_{-\sqrt{7}}^{-2} - \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right]_{-2}^1$$

$$= \left\{ -\frac{34}{3} - \left(-\frac{14\sqrt{7}}{3} \right) \right\} - \left\{ \left(-\frac{5}{3} \right) - \frac{22}{3} \right\}$$

$$= \frac{14\sqrt{7} - 7}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 図：前図，面積：} \frac{14\sqrt{7} - 7}{3}$$

(3)

k を実数とし、 $x + 2y = k$ とおく。このとき、図形 $x + 2y = k$ は傾き $-\frac{1}{2}$ 、 y 切片 $\frac{k}{2}$ の直線となる。

領域 D と直線 $x + 2y = k$ が共有点をもつときの k の取りうる値の範囲を求める。 k の取りうる値の最大値を M 、最小値を m とすると、 k の取りうる値の範囲は $m \leq k \leq M$ である。

ここで、領域 D 上の点 $(1, 0)$ を通るとき、 k が最大となるため、

$$M = 1 + 2 \cdot 0$$

$$= 1$$

である。また、 $y = x^2 + 2x - 3$ について、

$$y' = 2x + 2$$

であるため、放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ 上の点 $(-\sqrt{7}, 4 - 2\sqrt{7})$ における接線の傾きは $-2\sqrt{7} + 2$ であ

る。よって、 $-2\sqrt{7} + 2 < -\frac{1}{2}$ より、放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ と直線 $x + 2y = k$ が接するとき、 k が

最小となる。放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ と直線 $x + 2y = k$ が接するとき、 x についての 2 次方程式

$$x^2 + 2x - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{2}x - \left(\frac{k}{2} + 3 \right) = 0$$

は重解をもつ。2 次方程式 $x^2 + \frac{5}{2}x - \left(\frac{k}{2} + 3 \right) = 0$ の判別式を $d(k)$ とすると、

$$d(k) = \left(\frac{5}{2} \right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left\{ -\left(\frac{k}{2} + 3 \right) \right\}$$

$$= 2k + \frac{73}{4}$$

$$= 2 \left(k + \frac{73}{8} \right)$$

となるため、

$$d(m) = 0$$

$$\therefore m = -\frac{73}{8}$$

である。以上より、求める値の範囲は、

$$-\frac{73}{8} \leq x + 2y \leq 1$$

である。

$$(\text{答}) -\frac{73}{8} \leq x + 2y \leq 1$$

(1)

四角形 ADHE は正方形であり、点 K は線分 AH と線分 ED の交点であるため、点 K は線分 AH の中点である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{EK}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{EH}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{EA}} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\overrightarrow{\text{EC}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{\text{EG}} = \vec{a} + \vec{b}$$

であり、点 L は辺 CG を 3:1 に内分するため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{EL}} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{EC}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{EG}} \\ &= \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。さらに、点 M は辺 EF を $p:1-p$ に内分するため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{EM}} &= p\overrightarrow{\text{EF}} \\ &= p\vec{a}\end{aligned}$$

となる。以上より、求めるベクトルは、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{KL}} &= \overrightarrow{\text{EL}} - \overrightarrow{\text{EK}} \\ &= \left(\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c} \\ \overrightarrow{\text{KM}} &= \overrightarrow{\text{EM}} - \overrightarrow{\text{EK}} \\ &= p\vec{a} - \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \\ &= p\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{\text{KL}} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}, \overrightarrow{\text{KM}} = p\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はそれぞれ垂直であるため、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

である。また、立方体 ABCD-EFGH の 1 辺の長さは 1 であるため、

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

である。よって、(1)より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{KL}} \cdot \overrightarrow{\text{KM}} &= \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}\right) \cdot \left(p\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) \\ &= p|\vec{a}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{8}|\vec{c}|^2 + \frac{1}{2}(p-1)\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{4}(p+2)\vec{c} \cdot \vec{a} - \frac{1}{8}\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= p \cdot 1^2 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{8} \cdot 1^2 + \frac{1}{2}(p-1) \cdot 0 - \frac{1}{4}(p+2) \cdot 0 - \frac{1}{8} \cdot 0 \\ &= p - \frac{1}{8}\end{aligned}$$

であるため、 $\overrightarrow{\text{KL}}$ と $\overrightarrow{\text{KM}}$ が垂直になるとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{KL}} \cdot \overrightarrow{\text{KM}} &= 0 \\ \Leftrightarrow p - \frac{1}{8} &= 0 \\ \therefore p &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{1}{8}$$

(3)(i)

点 Q は直線 KL 上にあるため、実数 t を用いて、 $\overrightarrow{\text{KQ}} = t\overrightarrow{\text{KL}}$ と表される。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{EQ}} &= \overrightarrow{\text{EK}} + \overrightarrow{\text{KQ}} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + t\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}\right) \\ &= t\vec{a} + \frac{1}{2}(t+1)\vec{b} - \frac{1}{4}(t-2)\vec{c}\end{aligned}$$

となる。また、点 Q は面 EFGH を含む平面上にあるため、

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}(t-2) &= 0 \\ \therefore t &= 2\end{aligned}$$

である。したがって、 $\overrightarrow{\text{EQ}} = 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ となるため、線分 EQ の長さは、

$$\begin{aligned}\text{EQ} &= \sqrt{|\overrightarrow{\text{EQ}}|^2} \\ &= \sqrt{\left|2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\right|^2} \\ &= \sqrt{4|\vec{a}|^2 + \frac{9}{4}|\vec{b}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b}} \\ &= \sqrt{4 \cdot 1^2 + \frac{9}{4} \cdot 1^2 + 6 \cdot 0} \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{EQ} = \frac{5}{2}$$

(ii)

$\overrightarrow{\text{EK}} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\text{EK}}|^2 &= \left|\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (1^2 + 1^2 + 2 \cdot 0) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{EK}} \cdot \overrightarrow{\text{EQ}} &= \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot \left(2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\right) \\ &= \frac{3}{4}|\vec{b}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{3}{4} \cdot 1^2 + 0 + \frac{3}{4} \cdot 0 + 0 \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となるため、 $\triangle \text{EKQ}$ の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\text{EK}}|^2|\overrightarrow{\text{EQ}}|^2 - (\overrightarrow{\text{EK}} \cdot \overrightarrow{\text{EQ}})^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{41}}{8}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{41}}{8}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{2+3ai}{a-bi} \\
 &= \frac{(2+3ai)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)} \\
 &= -\frac{3\left(b-\frac{2}{3}\right)a}{a^2+b^2} + \frac{3a^2+2b}{a^2+b^2}i
 \end{aligned}$$

であり、 a, b ($a \neq 0$) は実数であるため、 c が純虚数であるとき、

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} -\frac{3\left(b-\frac{2}{3}\right)a}{a^2+b^2} = 0 \\ \frac{3a^2+2b}{a^2+b^2} \neq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ 3a^2+2b \neq 0 \end{cases} \quad (\because a \neq 0) \\
 &\therefore b = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{3a^2+2b}{a^2+b^2}i \\
 &= \frac{3a^2+2 \cdot \frac{2}{3}}{a^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}i \\
 &= 3i
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = \frac{2}{3}, c = 3i$$

(2)

部分積分法より、求める値は、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \left| x \cos \frac{x}{3} \right| dx &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left| x \cos \frac{x}{3} \right| dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left| x \cos \frac{x}{3} \right| dx \\
 &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} x \cos \frac{x}{3} dx - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} x \cos \frac{x}{3} dx \\
 &= \left[3x \sin \frac{x}{3} \right]_0^{\frac{3}{2}\pi} - 3 \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin \frac{x}{3} dx - \left[3x \sin \frac{x}{3} \right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} + 3 \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin \frac{x}{3} dx \\
 &= \frac{9}{2}\pi + 9 \left[\cos \frac{x}{3} \right]_0^{\frac{3}{2}\pi} - \left(3\sqrt{3}\pi - \frac{9}{2}\pi \right) - 9 \left[\cos \frac{x}{3} \right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \\
 &= (9 - 3\sqrt{3})\pi - 9 + \frac{9}{2} \\
 &= (9 - 3\sqrt{3})\pi - \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{2\pi} \left| x \cos \frac{x}{3} \right| dx = (9 - 3\sqrt{3})\pi - \frac{9}{2}$$

(3)

この直方体のサイコロを投げるとき、1, 6 の目が出る確率はともに p 、2, 3, 4, 5 の目が出る確率はいずれも q であるため、

$$2p + 4q = 1$$

が成り立つ。よって、得点の期待値を E とすると、

$$\begin{aligned}
 E &= 1 \cdot p + 2 \cdot q + 3 \cdot q + 4 \cdot q + 5 \cdot q + 6 \cdot p \\
 &= 7p + 14q \\
 &= \frac{7}{2} \cdot (2p + 4q) \\
 &= \frac{7}{2} \cdot 1 \\
 &= \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

となるため、得点の期待値は p, q の値によらずに一定である。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned}
 x &= 2 \cos \theta + 1, y = 3 \sin \theta \\
 \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{x-1}{2}, \sin \theta = \frac{y}{3}
 \end{aligned}$$

であり、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ であるため、曲線 $x = 2 \cos \theta + 1, y = 3 \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) は楕円

$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ である。楕円 $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ は x 軸対称であるため、曲線

$x = 2 \cos \theta + 1, y = 3 \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) で囲まれた図形を x 軸の回りに1回転して得られる回転体の体積は、

$$\begin{aligned}
 \pi \int_{-1}^3 y^2 dx &= \pi \int_{\pi}^0 y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta \\
 &= -\pi \int_0^{\pi} (3 \sin \theta)^2 \cdot (-2 \sin \theta) d\theta \\
 &= 18\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \\
 &= 18\pi \int_0^{\pi} (\cos^2 \theta - 1) \cdot \left(\frac{d}{d\theta} \cos \theta \right) d\theta \\
 &= 18\pi \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right]_0^{\pi} \\
 &= 18\pi \cdot \left\{ \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right\} \\
 &= 24\pi
 \end{aligned}$$

となる。

(答) 24π

(1)

$a_n = \left[\sqrt{n-1} \right]$ であるため,

$$a_1 = \left[\sqrt{0} \right] = 0$$

$$a_2 = \left[\sqrt{1} \right] = 1$$

$$a_3 = \left[\sqrt{2} \right] = 1$$

$$a_4 = \left[\sqrt{3} \right] = 1$$

$$a_5 = \left[\sqrt{4} \right] = 2$$

となる。

(答) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 2$

(2)

任意の実数 x に対し, $[x] \leq x < [x] + 1$ が成り立つ。よって, 自然数 n に対し,

$$\left[\sqrt{n-1} \right] \leq \sqrt{n-1} < \left[\sqrt{n-1} \right] + 1$$

$$\Leftrightarrow a_n \leq \sqrt{n-1} < a_n + 1$$

$$\Leftrightarrow a_n^2 \leq n-1 < (a_n+1)^2$$

$$\therefore a_n^2 + 1 \leq n \leq a_n^2 + 2a_n + 1$$

が成り立つため, m を 0 以上の整数とすると, $m^2 + 1 \leq n \leq m^2 + 2m + 1$ ならば $a_n = m$ である。したがって, $a_n = m$ となる自然数 n は $2m+1$ 個であるため, $a_n = 5$ となる自然数 n は,

$$2 \cdot 5 + 1 = 11 \text{ (個)}$$

である。

(答) 11 個

(3)

(2)より, m を 0 以上の整数とすると,

$$\sum_{k=m^2+1}^{m^2+2m+1} a_k = m(2m+1)$$

である。よって,

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^{n^2} a_k \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m^2+1}^{m^2+2m+1} a_k \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} m(2m+1) \\ &= 2 \sum_{m=0}^{n-1} m^2 + \sum_{m=0}^{n-1} m \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2} n(n-1) \\ &= \frac{1}{6} n(n-1)(4n+1) \end{aligned}$$

である。

(答) $S(n) = \frac{1}{6} n(n-1)(4n+1)$

(4)

(3)より, 求める極限の値は,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6} n(n-1)(4n+1)}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{4n} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot (1+0) \cdot (1+0) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n^3} = \frac{2}{3}$

(1)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{より,}$$

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{5}(A-2E) \\ &= -\frac{1}{5}\left\{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ Y &= \frac{1}{5}(A+3E) \\ &= \frac{1}{5}\left\{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。よって、求める行列は、

$$\begin{aligned} XY &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ YX &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X^2 &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ Y^2 &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X^2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, Y^2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} aX + bY &= a \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4a+b & -2a+2b \\ -2a+2b & a+4b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるため、求める実数は、

$$\begin{aligned} A &= aX + bY \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4a+b & -2a+2b \\ -2a+2b & a+4b \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+b = -10 \\ -a+b = 5 \\ a+4b = 5 \end{cases} \\ \therefore a &= -3, b = 2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = -3, b = 2$$

(3)

(1)より,

$$XY = YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X^2 = X, Y^2 = Y$$

が成り立つ。また、(2)より、 $A = -3X + 2Y$ であるため、自然数 n に対し、

$$\begin{aligned} A^n &= (-3X + 2Y)^n \\ &= (-3)^n X^n + 2^n Y^n \\ &= (-3)^n \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2^n \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \cdot (-3)^n + 2^n & -2 \cdot (-3)^n + 2^{n+1} \\ -2 \cdot (-3)^n + 2^{n+1} & (-3)^n + 2^{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \cdot (-3)^n + 2^n & -2 \cdot (-3)^n + 2^{n+1} \\ -2 \cdot (-3)^n + 2^{n+1} & (-3)^n + 2^{n+2} \end{pmatrix}$$

(1)

$y = \log x$ のとき,

$$y' = \frac{1}{x}$$

となるため、曲線 $y = \log x$ 上の点 $A(a, \log a)$ ($a > e$) における接線 ℓ の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{a}(x-a) + \log a \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{a}x - 1 + \log a \end{aligned}$$

である。点 B は直線 ℓ の y 切片、点 C 直線 ℓ の x 切片であるため、求める座標は,

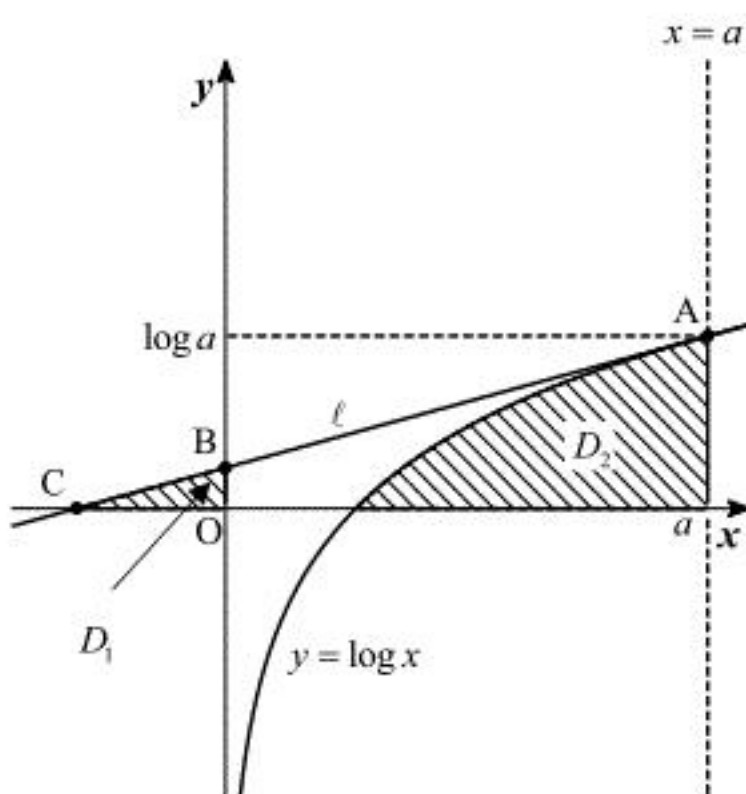
$$B(0, -1 + \log a), C(a(1 - \log a), 0)$$

である。

$$(\text{答}) \quad B(0, -1 + \log a), C(a(1 - \log a), 0)$$

(2)

ℓ と x 軸、 y 軸で囲まれた部分を D_1 、曲線 $y = \log x$ と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた部分を D_2 とする。このとき、領域 D_1, D_2 はそれぞれ下図の斜線部である。



上図より、領域 D_1 の面積 $S_1(a)$ は,

$$\begin{aligned} S_1(a) &= \frac{1}{2} \cdot \{-a(1 - \log a)\} \cdot (-1 + \log a) \\ &= \frac{1}{2} a(-1 + \log a)^2 \end{aligned}$$

であり、領域 D_2 の面積 $S_2(a)$ は,

$$\begin{aligned} S_2(a) &= \int_1^a \log x dx \\ &= [x \log x]_1^a - \int_1^a dx \\ &= a \log a - [x]_1^a \\ &= a(-1 + \log a) + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_1(a) = \frac{1}{2} a(-1 + \log a)^2, S_2(a) = a(-1 + \log a) + 1$$

(3)

(2)より,

$$\begin{aligned} T(a) &= S_2(a) - S_1(a) \\ &= a(-1 + \log a) + 1 - \frac{1}{2} a(-1 + \log a)^2 \\ &= -\frac{1}{2} a(\log a)^2 + 2a \log a - \frac{3}{2} a + 1 \end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{da}(a) &= -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (\log a)^2 - \frac{1}{2} a \cdot 2 \log a \cdot \frac{1}{a} + 2 \cdot 1 \cdot \log a + 2a \cdot \frac{1}{a} - \frac{3}{2} + 0 \\ &= -\frac{1}{2} (\log a)^2 + \log a + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。よって、 $e^2 \leq a \leq e^3$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{da}(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} (\log a)^2 + \log a + \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \log a &= 1 \pm \sqrt{2} \\ \therefore a &= e^{1 \pm \sqrt{2}} \quad (\because e^2 \leq a \leq e^3) \end{aligned}$$

となるため、区間 $e^2 \leq a \leq e^3$ における $T(a)$ の増減は下表のようになる。

a	e^2	...	$e^{1+\sqrt{2}}$	...	e^3
$\frac{dT}{da}(a)$		+	0	-	
$T(a)$	$\frac{1}{2}e^2 + 1$		極大		1

上表より、 $e^2 \leq a \leq e^3$ において、 $T(a)$ は $a = e^{1+\sqrt{2}}$ のとき、最大値

$$\begin{aligned} T(e^{1+\sqrt{2}}) &= -\frac{1}{2} e^{1+\sqrt{2}} (\log e^{1+\sqrt{2}})^2 + 2e^{1+\sqrt{2}} \log e^{1+\sqrt{2}} - \frac{3}{2} e^{1+\sqrt{2}} + 1 \\ &= (\sqrt{2} - 1) e^{1+\sqrt{2}} + 1 \end{aligned}$$

をとり、 $a = e^3$ のとき、最小値 1 をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } (\sqrt{2} - 1) e^{1+\sqrt{2}} + 1, \text{ 最小値: } 1$$

(1)

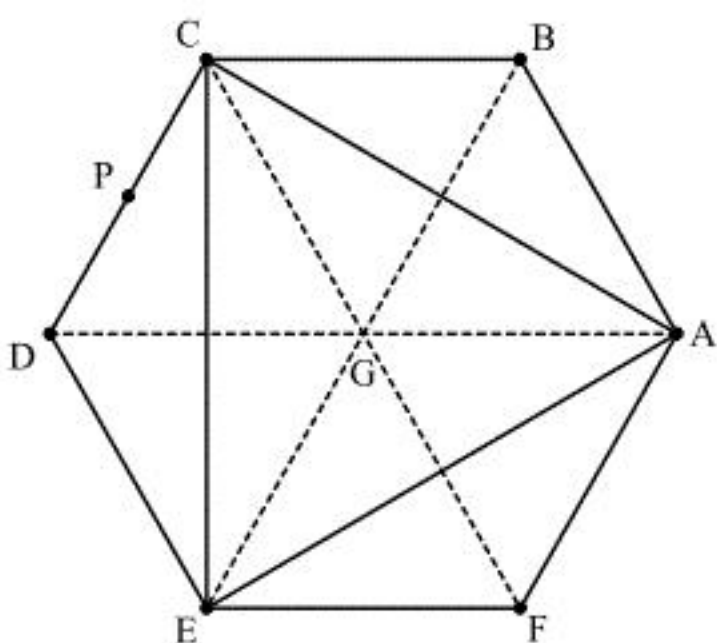
$$\begin{aligned}
 33^{20} &\equiv 9^{20} \pmod{90} \\
 &= 81^{10} \\
 &\equiv (-9)^{10} \pmod{90} \\
 &= 9^{10} \\
 &= 81^5 \\
 &\equiv (-9)^5 \pmod{90} \\
 &= -9^5 \\
 &= -9 \cdot 81^2 \\
 &\equiv -9 \cdot (-9)^2 \pmod{90} \\
 &= -729 \\
 &\equiv 81 \pmod{90}
 \end{aligned}$$

となるため、求める余りは81である。

(答) 81

(2)

六角形 ABCDEF は正六角形であるため、対角線 AD, BE, CF は1点で交わる。この交点を G とする。このとき、正六角形 ABCDEF は下図のようになる。



点 G は線分 AD の中点であるため、 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AG}$ であり、G は正三角形 ACE の重心となるため、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \\
 &= \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{e}
 \end{aligned}$$

である。また、点 P は辺 CD の中点であるため、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\
 &= \frac{1}{2}\vec{c} + \overrightarrow{AG}
 \end{aligned}$$

となる。さらに、 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{FE}$ であるため、求めるベクトルは、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{FP} &= \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AP} \\
 &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\vec{c} + \overrightarrow{AG} \\
 &= -\vec{e} + \frac{1}{2}\vec{c} + 2\left(\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{e}\right) \\
 &= \frac{7}{6}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{e}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{FP} = \frac{7}{6}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{e}$

(3)

10 個の玉が入っている袋から同時に3個の玉を取り出す組み合わせは、

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしい。取り出した3個の玉の整数を a, b, c ($1 \leq c < b < a \leq 10$) とするとき、 a, b, c を3辺の長さとする三角形が存在する条件は、

$$\begin{cases} a+b > c \\ b+c > a \\ c+a > b \end{cases} \\
 \therefore c < b < a < b+c \quad (\because a > b > c)$$

である。 $1 \leq c < b < a \leq 10$ より、 $3 \leq a \leq 10$ である。以下、 a の値により場合分けをする。

[1] $a=3$ のとき

条件を満たす b, c は存在しない。

[2] $a=4$ のとき

条件を満たす b, c の組は、

$$(b, c) = (3, 2)$$

の1通りである。

[3] $a=5$ のとき

条件を満たす b, c の組は、

$$(b, c) = (4, 3), (4, 2)$$

の2通りである。

[4] $a=6$ のとき

条件を満たす b, c の組は、

$$(b, c) = (5, 4), (5, 3), (5, 2), (4, 3)$$

の4通りである。

[5] $a=7$ のとき

条件を満たす b, c の組は、

$$(b, c) = (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (5, 4), (5, 3)$$

の6通りである。

[6] $a=8$ のとき

条件を満たす b, c の組は、

$$(b, c) = (7, 6), (7, 5), (7, 4), (7, 3), (7, 2), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (5, 4)$$

の9通りである。

[7] $a=9$ のとき

条件を満たす b, c の組は、

$$\begin{aligned}
 (b, c) &= (8, 7), (8, 6), (8, 5), (8, 4), (8, 3), (8, 2), \\
 &(7, 6), (7, 5), (7, 4), (7, 3), (6, 5), (6, 4)
 \end{aligned}$$

の12通りである。

[8] $a=10$ のとき

条件を満たす b, c の組は、

$$\begin{aligned}
 (b, c) &= (9, 8), (9, 7), (9, 6), (9, 5), (9, 4), (9, 3), (9, 2), \\
 &(8, 7), (8, 6), (8, 5), (8, 4), (8, 3), (7, 6), (7, 5), (7, 4), (6, 5)
 \end{aligned}$$

の16通りである。

以上、[1]～[8]より、条件を満たす場合は、

$$0+1+2+4+6+9+12+16=50 \text{ (通り)}$$

であるため、求める確率は、

$$\frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

である。

(答) $\frac{5}{12}$