

(1)

三角関数の倍角の公式より,

$$\begin{aligned}\cos 2\theta - 2\sin \theta &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 \theta) - 2\sin \theta &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 4\sin^2 \theta + 4\sin \theta - 1 &= 0 \\ \therefore \sin \theta &= \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} \quad (\because -1 \leq \sin \theta \leq 1)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$$

(2)

与えられた不等式について、真数条件より,

$$\begin{aligned}2 - x &> 0 \\ \Leftrightarrow x &< 2\end{aligned}$$

が必要である。また,

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}}(2 - x) &< \log_{\frac{1}{4}}(2 - x) \\ \Leftrightarrow \frac{\log_2(2 - x)}{\log_2 \frac{1}{2}} &< \frac{\log_2(2 - x)}{\log_2 \frac{1}{4}} \\ \Leftrightarrow -\log_2(2 - x) &< -\frac{1}{2}\log_2(2 - x) \\ \Leftrightarrow \log_2(2 - x) &> 0 \\ \Leftrightarrow 2 - x &> 2^0 \\ \therefore x &< 1\end{aligned}$$

であり, これは $x < 2$ を満たす。よって, 求める解は $x < 1$ である。

$$(\text{答}) \quad x < 1$$

(3)

$$x^4 - px + q = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 3) - (p - 4)x + q - 3$$

が成り立つため, x の多項式 $x^4 - px + q$ が $(x - 1)^2$ で割り切れる条件は, 等式

$$-(p - 4)x + q - 3 = 0$$

が x についての恒等式となることである。よって, 求める定数の値は,

$$\begin{cases} -(p - 4) = 0 \\ q - 3 = 0 \end{cases} \\ \therefore p = 4, q = 3$$

である。

$$(\text{答}) \quad p = 4, q = 3$$

(4)

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB} &= (\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EC}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC}\end{aligned}$$

が成り立つ。よって, $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + (\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC}) &= \vec{0} \\ \therefore \overrightarrow{EB} &= 2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EC}\end{aligned}$$

と表すことができる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EC}$$

(1)

点 A は 2 直線 $\ell_1: y = -2x + 3$, $\ell_2: y = 5$ の交点であるため,

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

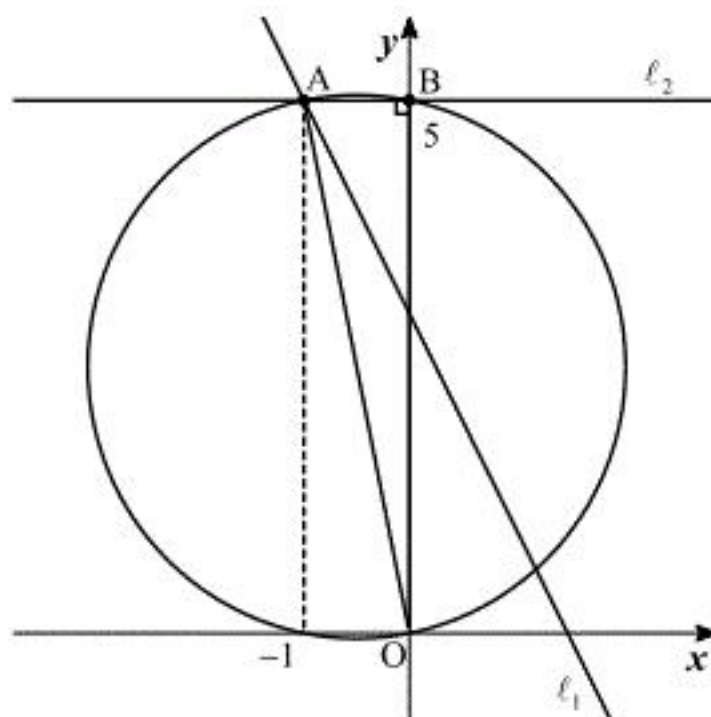
$$\therefore (x, y) = (-1, 5)$$

より, 点 A の座標は $(-1, 5)$ である。

(答) $(-1, 5)$

(2)

3 点 O, A, B を通る円は下図のようになる。



上図より, $\angle ABO = \frac{\pi}{2}$ であるため, 線分 OA は 3 点 O, A, B を通る円の直径であり, 線分 OA の中点は 3 点 O, A, B を通る円の中心である。△OAB において, 三平方の定理より, 線分 OA の長さは,

$$\sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

であり, 線分 OA の中点の座標は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ である。よって, 3 点 O, A, B を通る円の方程式は,

$$\begin{aligned} \left\{x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^2 + \left\{y - \frac{5}{2}\right\}^2 &= \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{13}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$$

(3)(i)

点 (α, β) は C_1 と C_2 の交点であるため,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 4 \\ \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 4 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 5\beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

を満たす。よって,

$$\begin{aligned} \alpha - 5\beta + 4 &= \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \alpha - 5\beta + 4 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 5\beta) - (\alpha^2 + \beta^2) + 4 \\ &= 0 - 4 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(ii)

(3)(i)より, 円 C_1 と C_2 の 2 つの交点は直線 $x - 5y + 4 = 0$ 上にある。円 C_2 の中心 O から直線 $x - 5y + 4 = 0$ までの距離は,

$$\frac{|0 - 5 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{4}{\sqrt{26}}$$

となり, また, 円 C_2 の半径は 2 である。したがって, 三平方の定理より, 円 C_1 と C_2 の 2 つの交点を結ぶ線分の長さは,

$$2\sqrt{2^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{26}}\right)^2} = \frac{4\sqrt{143}}{13}$$

である。

$$(答) \frac{4\sqrt{143}}{13}$$

(1)

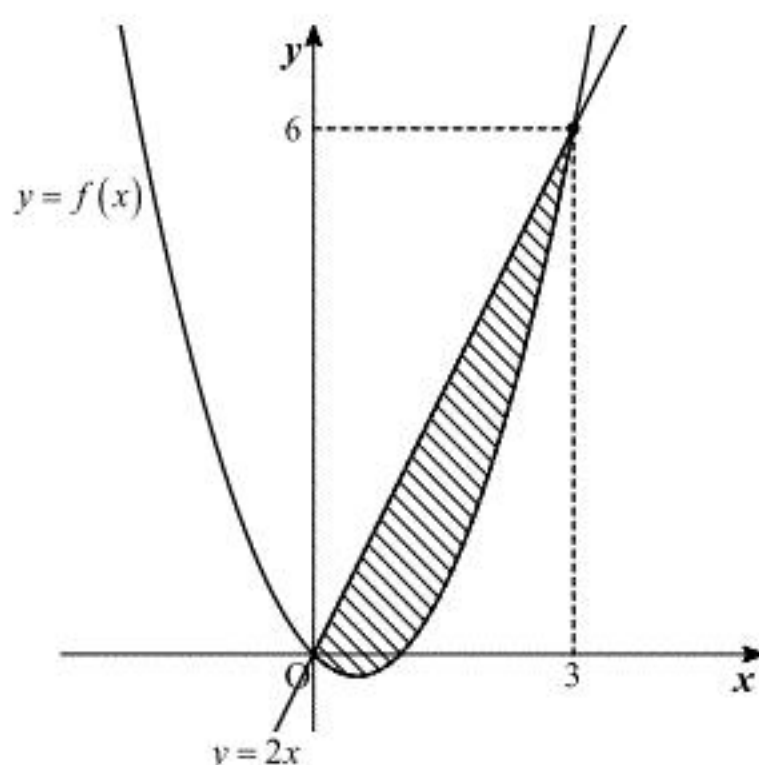
 $f(x) = x^2 - x$ より,

$$f(x) = 2x$$

$$\Leftrightarrow (x-3)x = 0$$

$$\therefore x = 0, 3$$

であるため、放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = 2x$ の交点は $(0, 0), (3, 6)$ である。よって、放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = 2x$ で囲まれた図形は下図の斜線部のようにになる。



上図より、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^3 \{2x - f(x)\} dx &= -\int_0^3 x(x-3) dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot (3-0)^3 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{9}{2}$

(2)(i)

x の符号により場合分けをする。

[1] $x \geq 0$ のとき

(1)より、関数 $y = f(x)$ と $y = 2|x|$ の共有点は $(0, 0), (3, 6)$ である。

[2] $x < 0$ のとき

$|x| = -x$ であるため、

$$f(x) = 2|x|$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = -2x$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad (\because x < 0)$$

となる。よって、関数 $y = f(x)$ と $y = 2|x|$ の共有点は $(-1, 2)$ である。

以上, [1], [2]より、求める共有点の座標は、

$$(-1, 2), (0, 0), (3, 6)$$

である。

(答) $(-1, 2), (0, 0), (3, 6)$

(ii)

$g(x) = f(x) - 2|x|$ とおく。このとき、

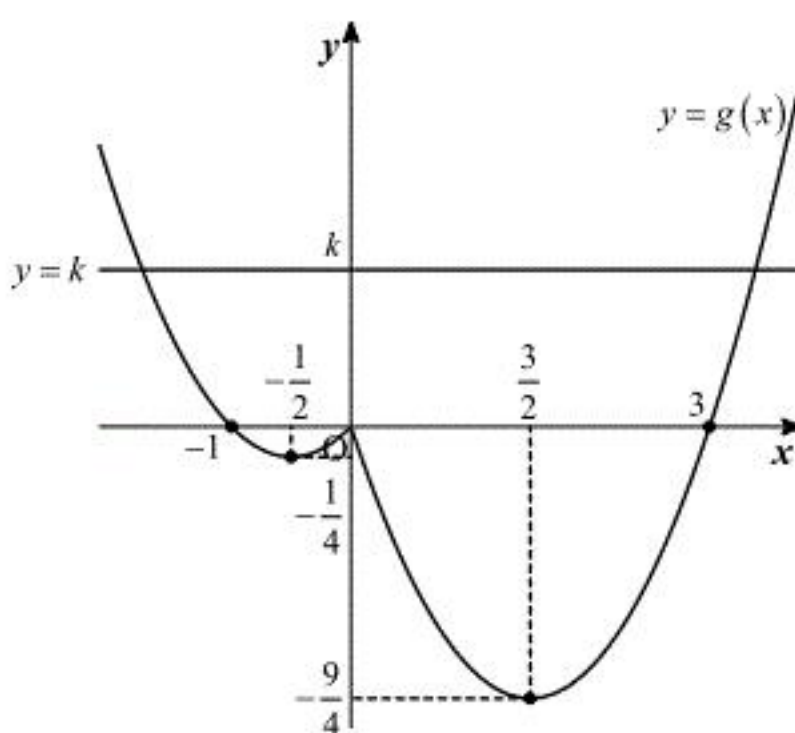
$$f(x) = 2|x| + k$$

$$\Leftrightarrow g(x) = k$$

であるため、関数 $y = f(x)$ と $y = 2|x| + k$ のグラフの共有点の個数は関数 $y = g(x)$ と直線 $y = k$ のグラフの共有点の個数と等しい。また、

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - 2|x| \\ &= \begin{cases} x^2 - 3x & (x \geq 0) \\ x^2 + x & (x < 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} & (x \geq 0) \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} & (x < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

であるため、関数 $y = g(x)$ のグラフと直線 $y = k$ は下図のようにになる。



上図より、求める値の範囲は、

$$-\frac{9}{4} < k < -\frac{1}{4}, 0 < k$$

である。

(答) $-\frac{9}{4} < k < -\frac{1}{4}, 0 < k$

(1)

80枚のカードの中から同時に3枚のカードを取り出すとき、その取り出し方は ${}_{80}C_3$ 通りであり、これらは同様に確からしい。ここで、 $40=3\cdot 13+1$ より、80枚のカードのうち、番号が3の倍数のカードは $13\cdot 2=26$ (枚)ある。また、26枚のカードの中から同時に3枚のカードを取り出すとき、その取り出し方は ${}_{26}C_3$ 通りである。よって、3つの番号がすべて3の倍数である確率は、

$$\begin{aligned}\frac{{}_{26}C_3}{{}_{80}C_3} &= \frac{26\cdot 25\cdot 24}{80\cdot 79\cdot 78} \\ &= \frac{5}{158}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{158}$$

(2)

余事象の確率、すなわち、3つの番号の積が3の倍数でない確率を求める。3つの番号の積が3の倍数でないとき、3つの番号はすべて3の倍数でない。(1)より、80枚のカードのうち、番号が3の倍数でないカードは $80-26=54$ (枚)あり、54枚のカードの中から同時に3枚のカードを取り出すとき、その取り出し方は ${}_{54}C_3$ 通りである。よって、余事象の確率は、

$$\begin{aligned}\frac{{}_{54}C_3}{{}_{80}C_3} &= \frac{54\cdot 53\cdot 52}{80\cdot 79\cdot 78} \\ &= \frac{477}{1580}\end{aligned}$$

である。したがって、求める確率は、

$$1 - \frac{477}{1580} = \frac{1103}{1580}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1103}{1580}$$

(3)

$$40=13\cdot 3+1$$

であるため、80枚のカードのうち、番号を3で割った余りが0であるカードは26枚、番号を3で割った余りが1であるカードは28枚、番号を3で割った余りが2であるカードは26枚である。また、3つの整数 a, b, c を3で割った余りをそれぞれ a', b', c' とすると、 $a+b+c$ が3の倍数となるのは、

$$(a', b', c') = (0, 0, 0), (0, 1, 2), (1, 1, 1), (2, 2, 2)$$

である場合である。よって、80枚のカードの中から同時に3枚のカードを取り出すとき、3つの番号の和が3の倍数となる場合の数は、

$$\begin{aligned}{}_{26}C_3 + {}_{26}C_1 \cdot {}_{28}C_1 \cdot {}_{26}C_1 + {}_{28}C_3 + {}_{26}C_3 &= \frac{26\cdot 25\cdot 24}{3\cdot 2\cdot 1} + 26\cdot 28\cdot 26 + \frac{28\cdot 27\cdot 26}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{26\cdot 25\cdot 24}{3\cdot 2\cdot 1} \\ &= 26\cdot 2\cdot (50+364+63+50) \\ &= 26\cdot 2\cdot 527 \text{ (通り)}\end{aligned}$$

である。したがって、求める確率は、

$$\begin{aligned}\frac{26\cdot 2\cdot 527}{{}_{80}C_3} &= \frac{26\cdot 2\cdot 527\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{80\cdot 79\cdot 78} \\ &= \frac{527}{1580}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{527}{1580}$$

(1)

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるため、ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned}(1+i)^{14} &= \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^{14} \\ &= (\sqrt{2})^{14} \cdot \left\{ \cos \left(14 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(14 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &= 2^7 \cdot \left(\cos \frac{7}{2} \pi + i \sin \frac{7}{2} \pi \right) \\ &= 128 \cdot (-i) \\ &= -128i\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}(1+i)^{14} &= a+bi \\ \Leftrightarrow -128i &= a+bi\end{aligned}$$

であり、 a, b は実数であるため、複素数の相等より、求める実数は $a=0, b=-128$ である。

(答) $a=0, b=-128$

(2)

$$x^4 - px + q = (x-1)^2 (x^2 + 2x + 3) - (p-4)x + q - 3$$

が成り立つため、 x の多項式 $x^4 - px + q$ が $(x-1)^2$ で割り切れる条件は、等式

$$-(p-4)x + q - 3 = 0$$

が x についての恒等式となることである。よって、求める定数の値は、

$$\begin{cases} -(p-4) = 0 \\ q-3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore p=4, q=3$$

である。

(答) $p=4, q=3$

(3)

三角関数の倍角の公式より、

$$\begin{aligned}\cos 2\theta - 2\sin \theta &= \frac{47}{50} \\ \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 \theta) - 2\sin \theta &= \frac{47}{50} \\ \Leftrightarrow 100\sin^2 \theta + 100\sin \theta - 3 &= 0 \\ \therefore \sin \theta &= \frac{-5+2\sqrt{7}}{10} \quad (\because -1 \leq \sin \theta \leq 1)\end{aligned}$$

である。

(答) $\sin \theta = \frac{-5+2\sqrt{7}}{10}$

(4)

$x \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{x^2+4})\sin 2x}{x^2} &= \frac{(\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{x^2+4})\sin 2x}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{\left\{ (\sqrt{x^2+x+4})^2 - (\sqrt{x^2+4})^2 \right\} \sin 2x}{x^2 (\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+4})} \\ &= \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+4}}\end{aligned}$$

となるため、求める極限值は、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{x^2+4})\sin 2x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+4}} \\ &= 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{0^2+0+4}+\sqrt{0^2+4}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{x^2+4})\sin 2x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(5)

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB} &= (\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EC}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC}\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + (\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC}) &= \vec{0} \\ \therefore \overrightarrow{EB} &= 2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EC}\end{aligned}$$

と表すことができる。

(答) $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EC}$

(1)

$b_n = a_{n+1} - 3a_n$ であるため, $a_1 = 1, a_2 = 4$ より,

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - 3a_1 \\ &= 4 - 3 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。また, 数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2} = -a_{n+1} + 12a_n$ を満たすため,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= -a_{n+1} + 12a_n \\ \Leftrightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} &= -4(a_{n+1} - 3a_n) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= -4b_n \end{aligned}$$

が成り立つ。よって, 数列 $\{b_n\}$ は初項 1, 公比 -4 の等比数列であるため, 一般項は,

$$\begin{aligned} b_n &= 1 \cdot (-4)^{n-1} \\ &= (-4)^{n-1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_n = (-4)^{n-1}$$

(2)

$b_n = a_{n+1} + 4a_n$ であるため, $a_1 = 1, a_2 = 4$ より,

$$\begin{aligned} c_1 &= a_2 + 4a_1 \\ &= 4 + 4 \cdot 1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

である。また, 数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2} = -a_{n+1} + 12a_n$ を満たすため,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= -a_{n+1} + 12a_n \\ \Leftrightarrow a_{n+2} + 4a_{n+1} &= 3(a_{n+1} + 4a_n) \\ \Leftrightarrow c_{n+1} &= 3c_n \end{aligned}$$

が成り立つ。よって, 数列 $\{c_n\}$ は初項 8, 公比 3 の等比数列であるため, 求める一般項は,

$$c_n = 8 \cdot 3^{n-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad c_n = 8 \cdot 3^{n-1}$$

(3)

$b_n = a_{n+1} - 3a_n, c_n = a_{n+1} + 4a_n$ であるため,

$$\begin{aligned} c_n - b_n &= (a_{n+1} + 4a_n) - (a_{n+1} - 3a_n) \\ &= 7a_n \end{aligned}$$

となる。よって, (1), (2) より, 求める一般項は,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{c_n - b_n}{7} \\ &= \frac{8 \cdot 3^{n-1} - (-4)^{n-1}}{7} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{8 \cdot 3^{n-1} - (-4)^{n-1}}{7}$$

(4)

(3) より,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{8 \cdot 3^n - (-4)^n}{7}}{\frac{8 \cdot 3^{n-1} - (-4)^{n-1}}{7}} \\ &= -4 \cdot \frac{8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n - 1}{8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 1} \end{aligned}$$

となる。 $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$ であるため, 求める極限值は,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} -4 \cdot \frac{8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n - 1}{8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 1} \\ &= -4 \cdot \frac{8 \cdot 0 - 1}{8 \cdot 0 - 1} \\ &= -4 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -4$$

(1)

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{1}{4}m \\ a + bm \end{pmatrix}$$

より、Aの f による像は $\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}m, a + bm\right)$ である。よって、条件①より、

$$\begin{cases} \frac{5}{2} - \frac{1}{4}m = 1 \\ a + bm = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ a = 6(1 - b) \end{cases}$$

である。また、

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ b \end{pmatrix}$$

より、Bの f による像 B' は $\left(-\frac{1}{4}, b\right)$ である。よって、

$$\begin{aligned} \overline{BB'} &= \overline{OB'} - \overline{OB} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ b - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} \overline{BB'} \cdot \overline{OC} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ b - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot m + (b - 1) \cdot (-1) \\ &= -b - \frac{1}{2} \quad (\because m = 6) \end{aligned}$$

となる。したがって、条件②より、

$$\begin{aligned} \overline{BB'} \cdot \overline{OC} &= 0 \\ \Leftrightarrow -b - \frac{1}{2} &= 0 \\ \therefore b &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} a &= 6(1 - b) \\ &= 6 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= 9 \end{aligned}$$

である。以上より、求める値は $a = 9, b = -\frac{1}{2}, m = 6$ である。

(答) $a = 9, b = -\frac{1}{2}, m = 6$

(2)

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ 9 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}y \\ 9x - \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

より、 $P(x, y)$ の f による像 P' は $\left(\frac{5}{2}x - \frac{1}{4}y, 9x - \frac{1}{2}y\right)$ である。よって、

$$\begin{aligned} \overline{PP'} &= \overline{OP'} - \overline{OP} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}y \\ 9x - \frac{3}{2}y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}y \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるため、求める内積は、

$$\begin{aligned} \overline{PP'} \cdot \overline{OC} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}y \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}y \\ 1 \end{pmatrix} \{1 \cdot 6 + 6 \cdot (-1)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

(答) $\overline{PP'} \cdot \overline{OC} = 0$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} \overline{QQ'} &= \left\{ \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}(t^2 - 1) \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4}(t^2 - 6t - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} |\overline{QQ'}| &= \left| -\frac{1}{4}(t^2 - 6t - 1) \right| \sqrt{1^2 + 6^2} \\ &= \frac{\sqrt{37}}{4} |t^2 - 6t - 1| \\ &= \frac{\sqrt{37}}{4} |(t - 3)^2 - 10| \end{aligned}$$

となる。よって、 t が全ての実数の範囲を動くとき、 $|\overline{QQ'}|$ のとり得る値の範囲は $|\overline{QQ'}| \geq 0$ と

なる。したがって、

$$\begin{aligned} |\overline{QQ'}| &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 6t - 1 &= 0 \\ \therefore t &= 3 \pm \sqrt{10} \end{aligned}$$

より、 $|\overline{QQ'}|$ は $t = 3 \pm \sqrt{10}$ のとき最小値0をとる。

(答) $t = 3 \pm \sqrt{10}$

(1)

部分積分法より、求める関数は、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_1^x \log t dt \\
 &= [t \log t]_1^x - \int_1^x dt \\
 &= x \log x - [t]_1^x \\
 &= x \log x - x + 1 \\
 g(x) &= \int_1^x t e^{t^{-1}} dt \\
 &= [t e^{t^{-1}}]_1^x - \int_1^x e^{t^{-1}} dt \\
 &= x e^{x^{-1}} - 1 - [e^{t^{-1}}]_1^x \\
 &= x e^{x^{-1}} - 1 - e^{x^{-1}} + 1 \\
 &= (x-1) e^{x^{-1}}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = x \log x - x + 1, \quad g(x) = (x-1) e^{x^{-1}}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{d}{dx} \int_1^x t e^{t^{-1}} dt \\
 &= x e^{x^{-1}}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $h(x) = g(x) - g(-x)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= g'(x) - (-1) \cdot g'(-x) \\
 &= x e^{x^{-1}} + (-x) e^{-x^{-1}} \\
 &= x e^{-x^{-1}} (e^{2x} - 1)
 \end{aligned}$$

であるため、 $x > 0$ のとき、 $h'(x) > 0$ である。よって、 $x > 0$ のとき、 $h(x)$ は単調増加である。また、 $h(0) = g(0) - g(-0) = 0$ であるため、 $x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
 h(x) &> 0 \\
 \Leftrightarrow g(x) &> g(-x)
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)(i)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx} \int_1^x \log t dt \\
 &= \log x
 \end{aligned}$$

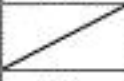
となるため、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= 1
 \end{aligned}$$

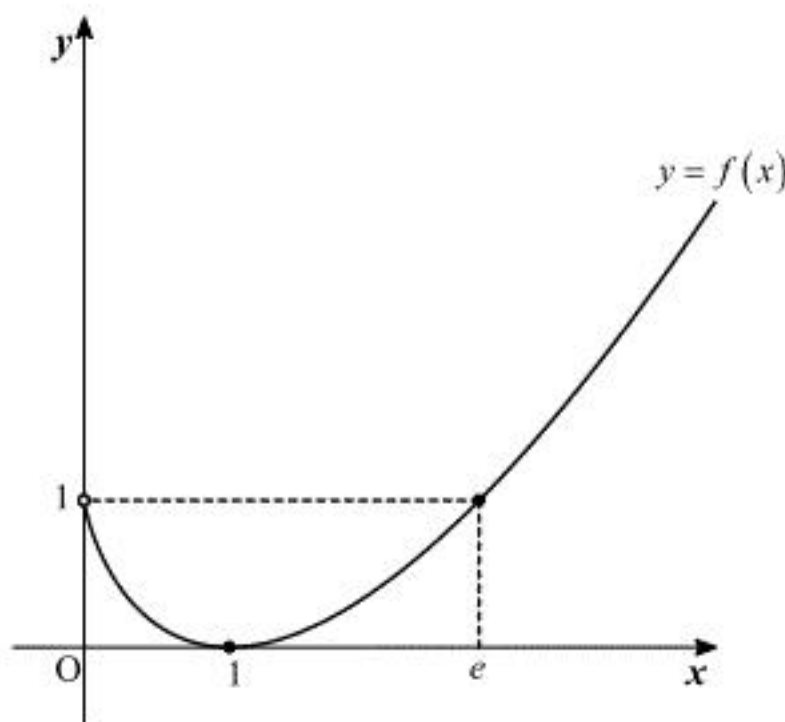
である。また、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ であるため、

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} (x \log x - x + 1) \\
 &= 0 - 0 + 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $x > 0$ における関数 $f(x)$ の増減は下表の通りである。

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	(1)		極小	

また、 $f(1) = 0$ 、 $f(e) = 1$ であるため、上表より、関数 $y = f(x)$ のグラフは下図の通りである。



上図より、実数 a, b が $0 < a < b$ と $f(a) = f(b)$ を満たすとき、 $a < 1 < b$ が成り立つ。

(証明終)

(ii)

$x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
 g(\log x) &= (\log x - 1) e^{\log x - 1} \\
 &= x (\log x - 1) e^{-1} \\
 &= \{f(x) - 1\} e^{-1}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、実数 a, b が $0 < a < b$ と $f(a) = f(b)$ を満たすとき、

$$\begin{aligned}
 g(\log a) &= \{f(a) - 1\} e^{-1} \\
 &= \{f(b) - 1\} e^{-1} \\
 &= g(\log b)
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(iii)

(3)(i)より、 $b > 1$ であるため、 $\log b > 0$ である。よって、(2)より、

$$g(\log b) > g(-\log b)$$

が成り立つ。また、(3)(ii)より、 $g(\log a) = g(\log b)$ であるため、

$$\begin{aligned}
 g(\log b) &> g(-\log b) \\
 \Leftrightarrow g(\log a) &> g(-\log b)
 \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、(3)(i)より、 $0 < a < 1 < b$ であるため、 $\log a < 0$ 、 $-\log b < 0$ である。ここで、 $g'(x) = x e^{x^{-1}}$ より、 $x < 0$ のとき、 $g'(x) < 0$ であるため、 $x < 0$ のとき、関数 $g(x)$ は単調減少である。よって、 $g(\log a) > g(-\log b)$ より、

$$\begin{aligned}
 \log a &< -\log b \\
 \Leftrightarrow \log ab &< 0 \\
 \therefore ab &< 1
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

9

(1)

8個の実数 $a_x, a_y, a_z, b_x, b_z, c_x, c_y, c_z$ を用いて、点A, B, Cの座標をそれぞれ

$$A(a_x, a_y, a_z), B(b_x, t, b_z), C(c_x, c_y, c_z)$$

とする。条件①, ②, ③, ④を満たす実数 $a_x, a_y, a_z, b_x, b_z, c_x, c_y, c_z$ が存在するための t の条件を求めればよい。ここで、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a_z = 0 \\ a_x^2 + a_y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b_x = c_x = 0 \\ c_y = t \\ c_z = -b_z \end{cases}$$

である。また、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a_x b_x + a_y t + a_z b_z$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{b_x^2 + t^2 + b_z^2}$$

であるため、

③

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \frac{\pi}{3} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = b_x^2 + t^2 + b_z^2 \\ a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \frac{1}{2} (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) \end{cases}$$

である。さらに、

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_x, a_z) \neq (0, 0) \\ (b_x, b_z) \neq (0, 0) \\ (c_x, c_z) \neq (0, 0) \end{cases}$$

であるため、

①かつ②かつ③かつ④

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_z = b_z = c_z = 0, a_x \neq 0, b_z \neq 0 \\ a_x^2 = 1 - a_y^2 \\ t a_y = \frac{1}{2} \\ b_z^2 = 1 - t^2 \\ c_y = t \\ c_z = -b_z \end{cases}$$

である。よって、条件①, ②, ③, ④を満たす点A, B, Cが存在するための t の条件は、

$$0 < |t| < 1 \text{ かつ } a_y = \frac{1}{2t}, |a_x| < 1 \text{ を満たす実数 } a_y \text{ が存在することである。このとき、} |t| > |t a_y| = \frac{1}{2}$$

であるため、求める値の範囲は、

$$-1 < t < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < t < 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad -1 < t < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < t < 1$$

(2)

(1)より、 $-1 < t < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < t < 1$ のとき、条件①, ②, ③, ④を満たす3点A, B, Cが存在し、この

とき、 $A(a_x, \frac{1}{2t}, 0), B(0, t, b_z), C(0, t, -b_z)$ と表される。ただし、 a_x, b_z は $a_x^2 = 1 - \frac{1}{4t^2}$ 、

$b_z^2 = 1 - t^2$ を満たす実数である。ここで、 $\triangle OAB$ は1辺の長さが1の正三角形であるため、 $\triangle OAB$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。また、 $\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ は合同であるため、 $\triangle OAC$ の面積も $\frac{\sqrt{3}}{4}$ である。ここで、

$\triangle OBC$ の面積は、

$$\frac{1}{2} |t| \cdot 2 |b_z| = |t b_z|$$

$$= |t| \sqrt{1 - t^2}$$

であり、 $\triangle OBC$ と $\triangle ABC$ は合同であるため、 $\triangle ABC$ の面積も $|t| \sqrt{1 - t^2}$ である。よって、四面

体OABCの表面積は、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + |t| \sqrt{1 - t^2} + |t| \sqrt{1 - t^2} &= 2|t| \sqrt{1 - t^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{t^2(1 - t^2)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{-\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。よって、 $-1 < t < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < t < 1$ より、四面体OABCの表面積は $t^2 = \frac{1}{2}$ 、すなわち、

$t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき、最大値

$$2\sqrt{0^2 + \frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3)

以下、複号同順とする。(2)より、 $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき、すなわち、3点A, B, Cの座標が、

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right), C\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

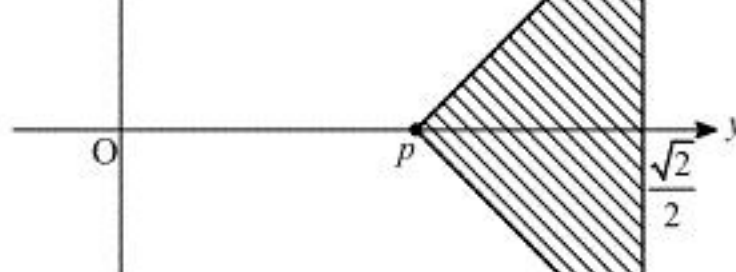
$$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right), C\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), B\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right), C\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), B\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right), C\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

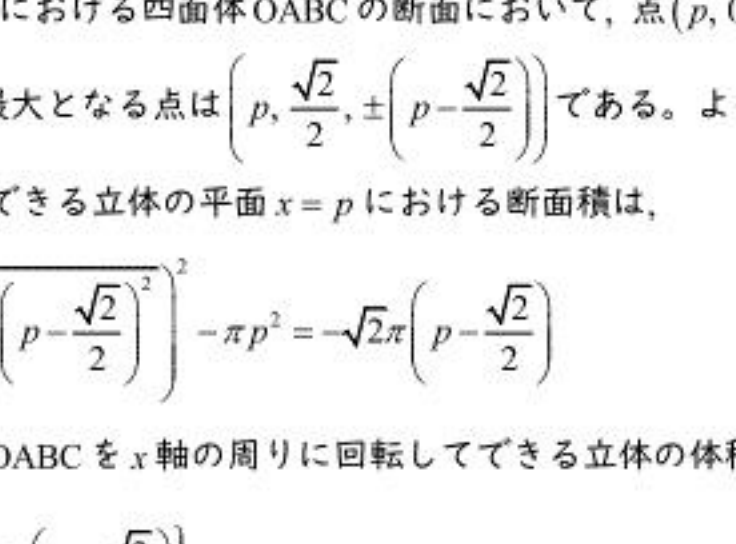
のいずれかのとき、四面体OABCの表面積は最大となる。対称性より、 V_x, V_y, V_z はいずれの場合も一定であるため、 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), C\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ である場合を考え

る。このとき、四面体OABCは下図のようになる。



ここで、四面体OABCを x 軸の周りに回転してできる立体の体積 V_x について、平面

$x = p \left(0 \leq p \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ における四面体OABCの断面は下図の斜線部のようになる。



上図より、平面 $x = p$ における四面体OABCの断面において、点 $(p, 0, 0)$ からの距離が最小となる点は $(p, p, 0)$ 、最大となる点は $\left(p, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \left(p - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ である。よって、四面体OABCを x

軸の周りに回転してできる立体の平面 $x = p$ における断面積は、

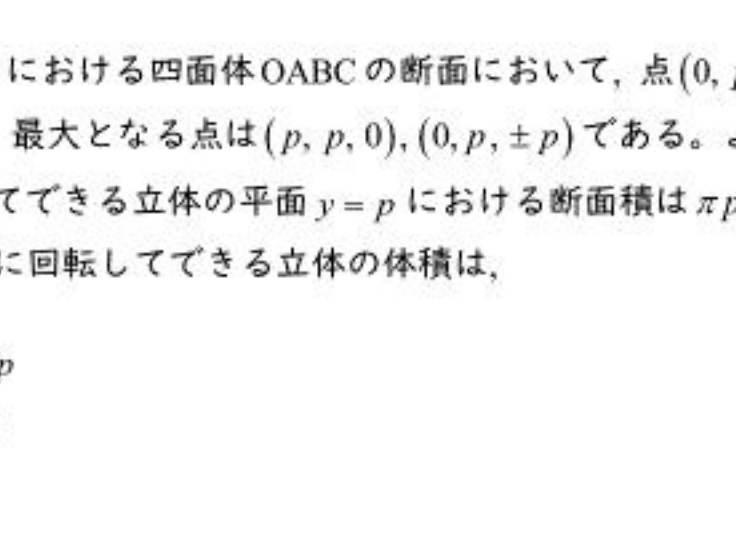
$$\pi \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(p - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right)^2 - \pi p^2 = -\sqrt{2}\pi \left(p - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

であるため、四面体OABCを x 軸の周りに回転してできる立体の体積は、

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left\{ -\sqrt{2}\pi \left(p - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} dp \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \left[\left(p - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \end{aligned}$$

となる。次に、四面体OABCを y 軸の周りに回転してできる立体の体積 V_y について、平面

$y = p \left(0 \leq p \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ における四面体OABCの断面は下図の斜線部のようになる。



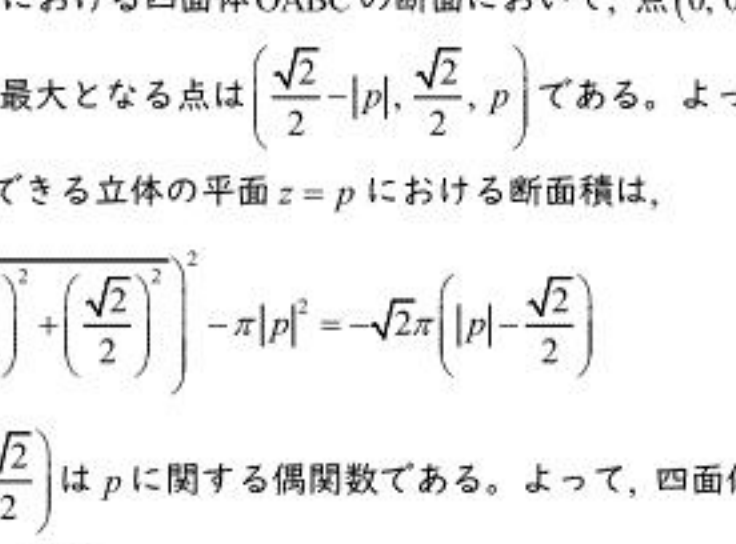
上図より、平面 $y = p$ における四面体OABCの断面において、点 $(0, p, 0)$ からの距離が最小となる点は $(0, p, 0)$ 、最大となる点は $(p, p, 0), (0, p, \pm p)$ である。よって、四面体OABCを y

軸の周りに回転してできる立体の平面 $y = p$ における断面積は πp^2 であるため、四面体OABCを y 軸の周りに回転してできる立体の体積は、

$$\begin{aligned} V_y &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \pi p^2 dp \\ &= \frac{\pi}{3} \left[p^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \pi \end{aligned}$$

となる。さらに、四面体OABCを z 軸の周りに回転してできる立体の体積 V_z について、平面

$z = p \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq p \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ における四面体OABCの断面は下図の斜線部のようになる。



上図より、平面 $z = p$ における四面体OABCの断面において、点 $(0, 0, p)$ からの距離が最小となる点は $(0, |p|, p)$ 、最大となる点は $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - |p|, \frac{\sqrt{2}}{2}, p\right)$ である。よって、四面体OABCを z

軸の周りに回転してできる立体の平面 $z = p$ における断面積は、

$$\pi \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - |p|\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right)^2 - \pi |p|^2 = -\sqrt{2}\pi \left(|p| - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

であり、 $-\sqrt{2}\pi \left(|p| - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ は p に関する偶関数である。よって、四面体OABCを z 軸の周りに

回転してできる立体の体積は、

$$V_z = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left\{ -\sqrt{2}\pi \left(|p| - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} dp$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left\{ -\sqrt{2}\pi \left(p - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} dp$$

$$= 2V_x$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

となる。以上より、求める体積は、

$$V_x = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi, V_y = \frac{\sqrt{2}}{12} \pi, V_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad V_x = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi, V_y = \frac{\sqrt{2}}{12} \pi, V_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

(1)

80 枚のカードの中から同時に 3 枚のカードを取り出すとき、その取り出し方は ${}_{80}C_3$ 通りであり、これらは同様に確からしい。ここで、 $40=3\cdot13+1$ より、80 枚のカードのうち、番号が 3 の倍数のカードは $13\cdot2=26$ (枚)ある。また、26 枚のカードの中から同時に 3 枚のカードを取り出すとき、その取り出し方は ${}_{26}C_3$ 通りである。よって、3 つの番号がすべて 3 の倍数である確率は、

$$\begin{aligned}\frac{{}_{26}C_3}{{}_{80}C_3} &= \frac{26\cdot25\cdot24}{80\cdot79\cdot78} \\ &= \frac{5}{158}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{5}{158}$$

(2)

余事象の確率、すなわち、3 つの番号の積が 3 の倍数でない確率を求める。3 つの番号の積が 3 の倍数でないとき、3 つの番号はすべて 3 の倍数でない。(1)より、80 枚のカードのうち、番号が 3 の倍数でないカードは $80-26=54$ (枚)あり、54 枚のカードの中から同時に 3 枚のカードを取り出すとき、その取り出し方は ${}_{54}C_3$ 通りである。よって、余事象の確率は、

$$\begin{aligned}\frac{{}_{54}C_3}{{}_{80}C_3} &= \frac{54\cdot53\cdot52}{80\cdot79\cdot78} \\ &= \frac{477}{1580}\end{aligned}$$

である。したがって、求める確率は、

$$1-\frac{477}{1580}=\frac{1103}{1580}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1103}{1580}$$

(3)

$40=13\cdot3+1$ であるため、80 枚のカードのうち、番号を 3 で割った余りが 0 であるカードは 26 枚、番号を 3 で割った余りが 1 であるカードは 28 枚、番号を 3 で割った余りが 2 であるカードは 26 枚である。また、3 つの整数 a, b, c を 3 で割った余りをそれぞれ a', b', c' とするとき、 $a+b+c$ が 3 の倍数となるのは、

$$(a', b', c')=(0, 0, 0), (0, 1, 2), (1, 1, 1), (2, 2, 2)$$

である場合である。よって、80 枚のカードの中から同時に 3 枚のカードを取り出すとき、3 つの番号の和が 3 の倍数となる場合の数は、

$$\begin{aligned}{}_{26}C_3+{}_{26}C_1\cdot{}_{28}C_1\cdot{}_{26}C_1+{}_{28}C_3+{}_{26}C_3 &= \frac{26\cdot25\cdot24}{3\cdot2\cdot1}+26\cdot28\cdot26+\frac{28\cdot27\cdot26}{3\cdot2\cdot1}+\frac{26\cdot25\cdot24}{3\cdot2\cdot1} \\ &= 26\cdot2\cdot(50+364+63+50) \\ &= 26\cdot2\cdot527 \text{ (通り)}\end{aligned}$$

である。したがって、求める確率は、

$$\begin{aligned}\frac{26\cdot2\cdot527}{{}_{80}C_3} &= \frac{26\cdot2\cdot527\cdot3\cdot2\cdot1}{80\cdot79\cdot78} \\ &= \frac{527}{1580}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{527}{1580}$$

(4)

余事象の確率、すなわち、3 つの番号の積が 27 の倍数でない確率を求める。80 枚のカードのうち、

素因数 3 をもたない番号のカードは 54 枚

素因数 3 を 1 個だけでもつ番号のカードは 18 枚

素因数 3 を 2 個だけでもつ番号のカードは 6 枚

素因数 3 を 3 個だけでもつ番号のカードは 2 枚

である。以下、3 つの番号の積のもつ素因数 3 の個数により場合分けをする。

[1] 3 つの番号の積が素因数 3 をもたないとき

(2)より、 ${}_{54}C_3$ 通りである。

[2] 3 つの番号の積が素因数 3 を 1 個だけでもつとき

3 枚のカードのうち、素因数 3 をもたない番号のカードが 2 枚、素因数 3 を 1 個だけでもつ番号のカードが 1 枚である。よって、場合の数は、

$${}_{54}C_2\cdot{}_{18}C_1 \text{ 通り}$$

である。

[3] 3 つの番号の積が素因数 3 を 2 個だけでもつとき

3 枚のカードのうち、素因数 3 をもたない番号のカードが 1 枚、素因数 3 を 1 個だけでもつ番号のカードが 2 枚となるか、もしくは、素因数 3 をもたない番号のカードが 1 枚、素因数 3 を 2 個だけでもつ番号のカードが 1 枚となるかである。よって、場合の数は、

$${}_{54}C_1\cdot{}_{18}C_2+{}_{54}C_2\cdot{}_6C_1 \text{ 通り}$$

である。

以上、[1], [2], [3]より、3 つの番号の積が 27 の倍数でない場合の数は、

$$\begin{aligned}{}_{54}C_3+{}_{54}C_2\cdot{}_{18}C_1+(\phantom{{}_{54}C_2\cdot}{}_{54}C_1\cdot{}_{18}C_2+{}_{54}C_2\cdot{}_6C_1) &= \frac{54\cdot53\cdot52}{3\cdot2\cdot1}+\frac{54\cdot53}{2\cdot1}\cdot18+54\cdot\frac{18\cdot17}{2\cdot1}+\frac{54\cdot53}{2\cdot1}\cdot6 \\ &= 67410 \text{ (通り)}\end{aligned}$$

であるため、余事象の確率は、

$$\begin{aligned}\frac{67410}{{}_{80}C_3} &= \frac{67410\cdot3\cdot2\cdot1}{80\cdot79\cdot78} \\ &= \frac{6741}{8216}\end{aligned}$$

である。したがって、求める確率は、

$$1-\frac{6741}{8216}=\frac{1475}{8216}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1475}{8216}$$