

(1)

点 P は辺 AB の中点であるため、 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ であり、点 Q は辺 AC を 2:1 に内分するため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ \therefore \overrightarrow{AC} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AQ}\end{aligned}$$

となる。ここで、点 R は線分 CP 上にあるため、実数 t ($0 \leq t \leq 1$) を用いて、

$$\overrightarrow{AR} = t\overrightarrow{AC} + (1-t)\overrightarrow{AP}$$

と表される。このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= t\overrightarrow{AC} + (1-t)\overrightarrow{AP} \\ &= \frac{3}{2}t\overrightarrow{AQ} + \frac{1-t}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

であり、点 R は線分 BQ 上にあるため、

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}t + \frac{1-t}{2} &= 1 \\ \therefore t &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1-\frac{1}{2}}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

である。ここで、 $\triangle ABC$ は $AB=1$, $\angle A=90^\circ$ を満たす直角二等辺三角形であるため、

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 1, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

となる。よって、求める長さは、

$$\begin{aligned}AR &= \sqrt{|\overrightarrow{AR}|^2} \\ &= \sqrt{\left|\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right|^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + 4|\overrightarrow{AC}|^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{1^2 + 4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 0} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \ AR = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

(2)

$\log_{10} 3 = 0.4771$ より、 $\left(\frac{1}{3}\right)^{26}$ の常用対数をとると、

$$\begin{aligned}\log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{26} &= -26 \log_{10} 3 \\ &= -26 \cdot 0.4771 \\ &= -12.4046\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}-13 &< \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{26} < -12 \\ \Leftrightarrow 10^{-13} &< \left(\frac{1}{3}\right)^{26} < 10^{-12}\end{aligned}$$

が成り立つため、 $\left(\frac{1}{3}\right)^{26}$ を小数で表すと、小数第 13 位に初めて 0 でない数字が現れる。

$$(答) \text{ 小数第 13 位}$$

(3)

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= (x-3)(x+1) \text{ より,} \\ x^2 - 2x - 3 &> 0 \\ \therefore x &< -1, 3 < x\end{aligned}$$

である。ここで、 $x^2 - (k+1)x + k = (x-1)(x-k)$ より、 k と 1 の大小関係により場合分けをする。

[1] $k \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}x^2 - (k+1)x + k &> 0 \\ \therefore x &< 1, k < x\end{aligned}$$

となる。 $x < -1$ ならば $x < 1$ であり、 $3 < x$ かつ $x < 1$ を満たす実数 x は存在しないため、 $A \subset B$ であるための必要十分条件は $3 < x$ ならば $k < x$ となることである。よって、

$$1 \leq k \leq 3$$

である。

[2] $k < 1$ のとき

$$\begin{aligned}x^2 - (k+1)x + k &> 0 \\ \therefore x &< k, 1 < x\end{aligned}$$

となる。 $3 < x$ ならば $1 < x$ であり、 $x < -1$ かつ $1 < x$ を満たす実数 x は存在しないため、 $A \subset B$ であるための必要十分条件は $x < -1$ ならば $x < k$ となることである。よって、

$$-1 \leq k < 1$$

である。

以上、[1], [2] より、求める必要十分条件は、

$$-1 \leq k \leq 3$$

である。

$$(答) \ -1 \leq k \leq 3$$

2

(1)

 $t \geq 1$ のとき、

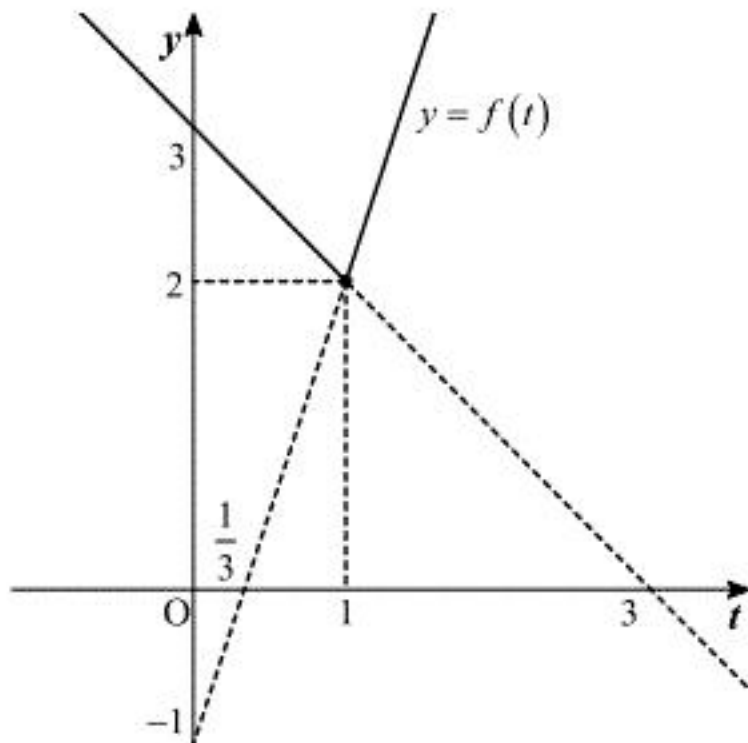
$$\begin{aligned} f(t) &= 2(t-1) + t + 1 \\ &= 3t - 1 \end{aligned}$$

であり、 $t < 1$ のとき、

$$\begin{aligned} f(t) &= -2(t-1) + t + 1 \\ &= -t + 3 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} f(t) &= 2|t-1| + t + 1 \\ &= \begin{cases} 3t-1 & (t \geq 1) \\ -t+3 & (t < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

であり、関数 $y = f(t)$ のグラフは下図の通りである。

(答) 前図

(2)

 $x \leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x (-t+3) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + 3t \right]_0^x \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 3x \end{aligned}$$

であり、 $x > 1$ のとき、

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\ &= F(1) + \int_1^x (3t-1) dt \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + \left[\frac{3}{2}t^2 - t \right]_1^x \\ &= \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{2}x^2 - x \right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 1^2 - 1 \right) \\ &= \frac{3}{2}x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

である。よって、求める関数は、

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - x + 2 & (x > 1) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x & (x \leq 1) \end{cases}$$

である。

$$(答) F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - x + 2 & (x > 1) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x & (x \leq 1) \end{cases}$$

(3)

 $F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$ である。また、 $F'(x) = f(x)$ であるため、(1)より、

$$\begin{aligned} F'(0) &= f(0) \\ &= -0 + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。よって、曲線 $y = F(x)$ 上の点 $(0, F(0))$ における接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= F'(0)x + F(0) \\ \Leftrightarrow y &= 3x \end{aligned}$$

である。

(答) $y = 3x$

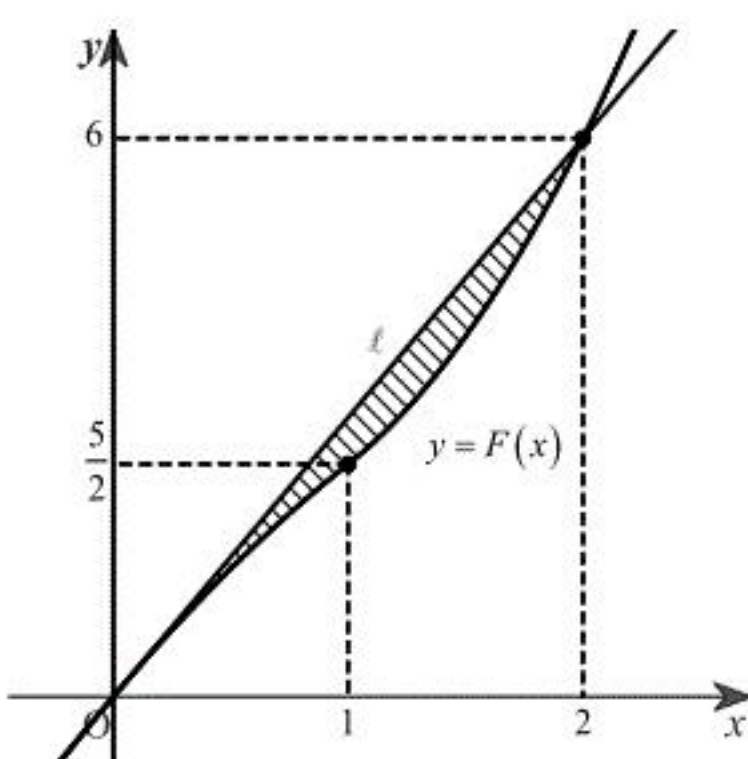
(4)

 $x > 1$ のとき、

$$\begin{aligned} F(x) &= 3x \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - x + 2 &= 3x \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 2 \quad (\because x > 1) \end{aligned}$$

となり、 $x \leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} F(x) &= 3x \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 3x &= 3x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 &= 0 \\ \therefore x &= 0 \end{aligned}$$

となるため、関数 $y = F(x)$ と直線 ℓ の共有点は $(0, 0)$ 、 $(2, 6)$ である。よって、関数 $y = F(x)$ と直線 ℓ は下図の通りである。

上図より、求める面積は斜線部の面積であるため、

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \{3x - F(x)\} dx \\ &= \int_0^1 \{3x - F(x)\} dx + \int_1^2 \{3x - F(x)\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ 3x - \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x \right) \right\} dx + \int_1^2 \left\{ 3x - \left(\frac{3}{2}x^2 - x + 2 \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx - \int_1^2 \left(\frac{3}{2}x^2 - 4x + 2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{2}{3}$

(1)

6!の値は,

$$\begin{aligned} 6! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ &= 720 \end{aligned}$$

となる。

(答) $6! = 720$

また,

$$\begin{aligned} 7! &= 720 \cdot 7 \\ &= 5040 \end{aligned}$$

であるため, x, y, z の少なくとも1つは7以上と仮定すると,

$$\begin{aligned} A &= x! + y! + z! \\ &\geq 7! \\ &= 5040 \end{aligned}$$

となり, A が3桁の自然数であることに矛盾する。よって, x, y, z はすべて6以下であるため,

$$\begin{aligned} A &= 100x + 10y + z \\ &\leq 100 \cdot 6 + 10 \cdot 6 + 6 \\ &= 666 \end{aligned}$$

である。ここで, x, y, z の少なくとも1つは6以上と仮定すると,

$$\begin{aligned} A &= x! + y! + z! \\ &\geq 6! \\ &= 720 \end{aligned}$$

となり, $A \leq 666$ に矛盾する。よって, x, y, z はすべて5以下である。

(証明終)

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} A &= x! + y! + z! \\ &\leq 5! + 5! + 5! \\ &= 360 \end{aligned}$$

となる。ここで, $x \geq 4$ と仮定すると,

$$\begin{aligned} A &= 100x + 10y + z \\ &\geq 100x \\ &\geq 400 \end{aligned}$$

となり, $A \leq 360$ に矛盾する。よって, x は3以下である。

(証明終)

(3)

$y \leq 4$ かつ $z \leq 4$ と仮定する。(2)より, $x \leq 3$ であるため,

$$\begin{aligned} A &= x! + y! + z! \\ &\leq 3! + 4! + 4! \\ &= 54 \end{aligned}$$

となり, A が3桁の自然数であることに矛盾する。よって, $y \geq 5$ または $z \geq 5$ である。ここで,

(1)より, $y \leq 5$ かつ $z \leq 5$ であるため, y, z のうち少なくとも1つは5である。

(証明終)

(4)

(2)より, $x = 1, 2, 3$ であるため, 以下, x の値により場合分けをする。

[1] $x = 1$ のとき

(3)より, $y = 5$ または $z = 5$ である。 $y = 5$ のとき,

$$\begin{aligned} 100x + 10y + z &= x! + y! + z! \\ \Leftrightarrow 100 \cdot 1 + 10 \cdot 5 + z &= 1! + 5! + z! \\ \Leftrightarrow z + 29 &= z! \end{aligned}$$

となるが, これを満たす自然数 z ($0 \leq z \leq 5$) は存在しない。また, $z = 5$ のとき,

$$\begin{aligned} 100x + 10y + z &= x! + y! + z! \\ \Leftrightarrow 100 \cdot 1 + 10y + 5 &= 1! + y! + 5! \\ \Leftrightarrow 10y &= y! + 16 \end{aligned}$$

であり, これを満たす自然数 y ($0 \leq y \leq 5$) は $y = 4$ のみである。

[2] $x = 2$ のとき

$$\begin{aligned} A &= 100x + 10y + z \\ &\geq 100x \\ &= 200 \end{aligned}$$

であり, $A = 2! + y! + z! = y! + z! + 2$ であるため,

$$\begin{aligned} A &\geq 200 \\ \Leftrightarrow y! + z! &\geq 198 \end{aligned}$$

となる。(1)より, $y, z \leq 5$ であるため, $y! + z! \geq 198$ を満たす自然数の組は $y = z = 5$ のみであるが, このとき,

$$\begin{aligned} 100x + 10y + z &= 255 \\ x! + y! + z! &= 242 \end{aligned}$$

となり, 矛盾する。

[3] $x = 3$ のとき

$$\begin{aligned} A &= 100x + 10y + z \\ &\geq 100x \\ &= 300 \end{aligned}$$

である。また, (1)より, $y \leq 5, z \leq 5$ であるため,

$$\begin{aligned} A &= x! + y! + z! \\ &\leq 3! + 5! + 5! \\ &= 246 \end{aligned}$$

となり, $A \geq 300$ に矛盾する。

以上, [1], [2], [3]より, 求める自然数は,

$$A = 145$$

である。

(答) $A = 145$

(1)(i)

(a)より、 $t=0$ のとき、点Qは頂点Bにいる。よって、(b)より、 $t=1$ のとき、点Qは頂点B以外の3つの頂点A, C, Dのいずれかにいる。したがって、点Pが頂点Cにいるとき、 $d_1=1$ となるのは点Qが頂点A, Dのいずれかにいるときの2通りである。

(答) 2通り

(ii)

(i)より、 $t=1$ のとき、点Qは頂点B以外の3つの頂点A, C, Dのいずれかにいる。したがって、点Pが頂点Bにいるとき、 $d_1=1$ となるのは点Qが頂点A, C, Dのいずれかにいるときの3通りである。

(答) 3通り

(2)

(1)(i)と同様に、 $t=1$ のとき、点Pが頂点Dにいるならば、 $d_1=1$ となるのは点Qが頂点A, Cのいずれかにいるときの2通りである。よって、求める確率は、

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

である。

(答) $p_1 = \frac{7}{9}$

(3)

自然数 n に対し、 $d_n = 0, 1$ であるから、

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (d_1, d_2) &= (0, 1), (1, 0) \end{aligned}$$

である。以下、 (d_1, d_2) により場合分けをする。

[1] $(d_1, d_2) = (0, 1)$ のとき

(2)より、 $d_1=0$ となる確率は $1-p_1=\frac{2}{9}$ である。 $d_1=0$ のとき、2点P, Qは四面体ABCDの同じ頂点にいるため、 $d_2=1$ となるのは2点P, Qが異なる頂点に移動するときである。

よって、 $d_2=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$ であるため、 $(d_1, d_2) = (0, 1)$ となる確率は、

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

である。

[2] $(d_1, d_2) = (1, 0)$ のとき

(2)より、 $d_1=1$ となる確率は $p_1=\frac{7}{9}$ である。 $d_1=1$ のとき、2点P, Qは四面体ABCDの異なる頂点にいるため、 $d_2=0$ となる確率は $1-p_1=\frac{2}{9}$ である。よって、 $(d_1, d_2) = (1, 0)$ となる確率は、

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{81}$$

である。

以上、[1], [2]より、求める確率は、

$$\frac{4}{27} + \frac{14}{81} = \frac{26}{81}$$

である。

(答) $\frac{26}{81}$

(4)

$d_n=0$ となる確率は $1-p_n$ であり、(3)[1]より、 $d_n=0$ のとき、 $d_{n+1}=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$ である。

また、 $d_n=1$ となる確率は p_n であり、(3)[2]より、 $d_n=1$ のとき、 $d_{n+1}=1$ となる確率は $p_1=\frac{7}{9}$

である。よって、 $d_{n+1}=1$ となる確率 p_{n+1} について、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1-p_n) \cdot \frac{2}{3} + p_n \cdot \frac{7}{9} \\ &= \frac{1}{9} p_n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{9} p_n + \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{3}{4} &= \frac{1}{9} \left(p_n - \frac{3}{4} \right) \end{aligned}$$

となるため、数列 $\left\{ p_n - \frac{3}{4} \right\}$ は初項 $p_1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{36}$ 、公比 $\frac{1}{9}$ の等比数列である。したがって、求める一般項は、

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{3}{4} + \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4} \left(3 + \frac{1}{9^n} \right) \end{aligned}$$

である。

(答) $p_{n+1} = \frac{1}{9} p_n + \frac{2}{3}, p_n = \frac{1}{4} \left(3 + \frac{1}{9^n} \right)$

(1)

k を実数とし、 $k = \int_0^1 t f(t) dt$ とおく。このとき、 $f(x) = \sin \pi x + k$ であるため、

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 t f(t) dt \\ &= \int_0^1 t (\sin \pi t + k) dt \\ &= \int_0^1 t \sin \pi t dt + k \int_0^1 t dt \\ &= \left[t \cdot \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right) \right]_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \pi t dt + k \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^1 + \frac{1}{2} k \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} k \\ \therefore k &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

となる。よって、求める関数は $f(x) = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}$ である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}$$

(2)

$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} &\frac{\theta^3}{\tan \theta - \sin \theta} \\ &= \frac{\theta^3}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \sin \theta} \\ &= \frac{\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\theta^2}{1 - \cos \theta} \cdot \cos \theta \\ &= \frac{\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\theta^2}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \cdot (1 + \cos \theta) \cdot \cos \theta \\ &= \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^{-3} (1 + \cos \theta) \cos \theta \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、求める極限值は、

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^3}{\tan \theta - \sin \theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^{-3} (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ &= 1^{-3} \cdot (1 + 1) \cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^3}{\tan \theta - \sin \theta} = 2$$

(3)

自然数 n に対し、

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k}{n} + 1} \end{aligned}$$

が成り立つため、区分求積法より、求める極限值は、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k}{n} + 1} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \\ &= \left[\log |x+1| \right]_0^1 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \log 2$$

(4)

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| (e^x + a) \\ &= \begin{cases} x(e^x + a) & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -x(e^x + a) & (x < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x(e^x + a) - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (e^x + a) \\ &= a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x(e^x + a) - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow -0} (-e^x - a) \\ &= -a - 1 \end{aligned}$$

となる。よって、 $x=0$ において $f(x)$ が微分可能であるとき、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ \Leftrightarrow a + 1 &= -a - 1 \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = -1$$

(1)

$\alpha \geq 1, \beta \geq 1$ より, $\alpha - 1 \geq 0, \beta - 1 \geq 0$ であるため,

$$\begin{aligned}(\alpha - 1)(\beta - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 &\geq 0 \\ \therefore \alpha\beta &\geq \alpha + \beta - 1\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

x に関する 2 次方程式 $x^2 - mx + k = 0$ において, 解と係数の関係より,

$$p + q = m, pq = k$$

が成り立つ。よって, $q = m - p$ であり, p, m は整数であるため, q は整数である。よって,

$k = pq$ より, k も整数である。

(証明終)

(3)

背理法を利用して, x に関する 2 次方程式 $x^2 - n^2x + n = 0$ は整数の解をもたないことを示

す。すなわち, x に関する 2 次方程式 $x^2 - n^2x + n = 0$ が整数の解をもつと仮定して矛盾を導

く。 n は自然数であるため, n^2 も自然数である。よって, (2) と仮定より, x に関する 2 次方程

式 $x^2 - n^2x + n = 0$ は 2 つの整数の解をもつ。この解を α, β とおくと, 解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta = n^2, \alpha\beta = n$$

が成り立つ。よって, α, β は自然数であるため, (1) より,

$$\begin{aligned}\alpha\beta &\geq \alpha + \beta - 1 \\ \Leftrightarrow n &\geq n^2 - 1 \\ \Leftrightarrow n(n - 1) &\leq 1\end{aligned}$$

である。上式を満たす自然数 n は $n = 1$ のみであるため,

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$$

となるが, 上式を満たす自然数 α, β は存在しないため, 矛盾する。よって, x に関する 2 次

方程式 $x^2 - n^2x + n = 0$ は整数の解をもたない。

(証明終)

(4)

x に関する 2 次方程式 $x^2 - (n - 2)^2x + n = 0$ が整数の解をもつとする。 n は自然数であるため,

$(n - 2)^2$ は整数である。よって, (2) より, x に関する 2 次方程式 $x^2 - (n - 2)^2x + n = 0$ は 2 つの

整数解をもつ。この 2 解を α, β ($\alpha \leq \beta$) とおくと, 解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta = (n - 2)^2, \alpha\beta = n$$

が成り立つため, α, β は自然数である。また, 上式より,

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (\alpha\beta - 2)^2 \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta &= \alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta + 4 \\ \therefore \alpha^2\beta^2 &= \alpha + \beta + 4\alpha\beta - 4\end{aligned}$$

であり, $\alpha \leq \beta \leq \beta^2$ が成り立つため,

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2 &= \alpha + \beta + 4\alpha\beta - 4 \\ &< \beta^2 + \beta^2 + 4\beta \cdot \beta \\ &= 6\beta^2\end{aligned}$$

となる。よって, $\beta^2 \geq 1$ より $\alpha^2 < 6$ であり, α は自然数であるため, $\alpha = 1, 2$ である。 $\alpha = 1$

と仮定すると,

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2 &= \alpha + \beta + 4\alpha\beta - 4 \\ \Leftrightarrow 1^2 \cdot \beta^2 &= 1 + \beta + 4 \cdot 1 \cdot \beta - 4 \\ \Leftrightarrow \beta^2 - 5\beta + 3 &= 0 \\ \therefore \beta &= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}\end{aligned}$$

となるが, これは β が自然数であることに矛盾する。 $\alpha = 2$ のとき,

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2 &= \alpha + \beta + 4\alpha\beta - 4 \\ \Leftrightarrow 2^2 \cdot \beta^2 &= 2 + \beta + 4 \cdot 2 \cdot \beta - 4 \\ \Leftrightarrow 4\beta^2 - 9\beta + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\left(\beta - \frac{1}{4}\right)(\beta - 2) &= 0 \\ \therefore \beta &= 2, \frac{1}{4}\end{aligned}$$

であり, β は自然数であるため, $\beta = 2$ となる。よって,

$$n = \alpha\beta = 4$$

であり, x に関する 2 次方程式 $x^2 - (n - 2)^2x + n = 0$ の解は $x = 2$ である。

(答) $n = 4$, 解: $x = 2$

(1)

 $y = e^x$ のとき、

$$y' = e^x$$

であるため、接線 ℓ_1 の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= e^0(x-0) + e^0 \\ &\Leftrightarrow y = x+1 \end{aligned}$$

であり、 $f(x) = x+1$ となる。また、接線 ℓ_2 の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= e^a(x-a) + e^a \\ &\Leftrightarrow y = e^a x - (a-1)e^a \end{aligned}$$

であり、 $g(x) = e^a x - (a-1)e^a$ となる。よって、

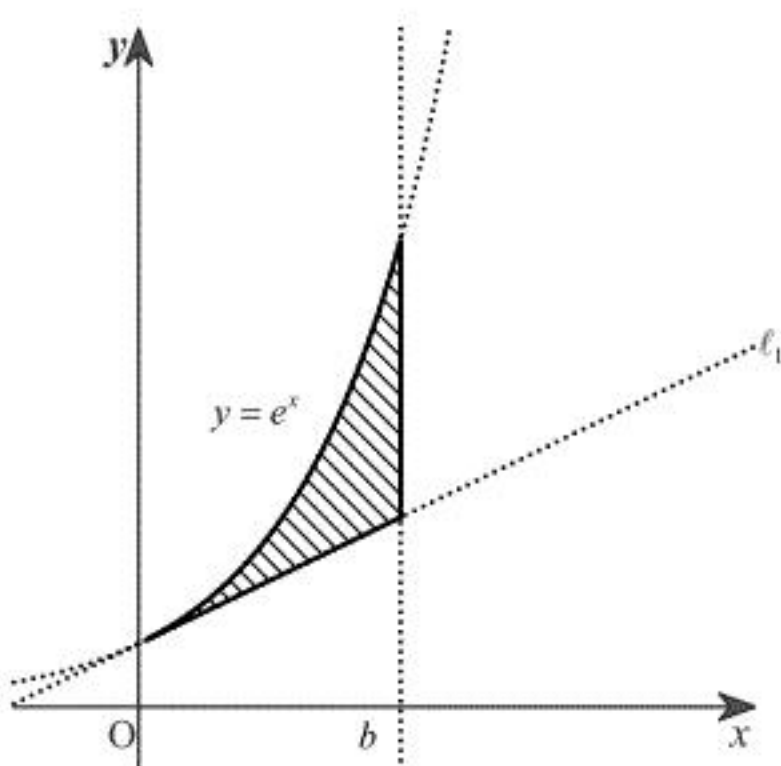
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow x+1 &= e^a x - (a-1)e^a \\ \Leftrightarrow (e^a - 1)x &= (a-1)e^a + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{(a-1)e^a + 1}{e^a - 1} \quad (\because a > 0)$$

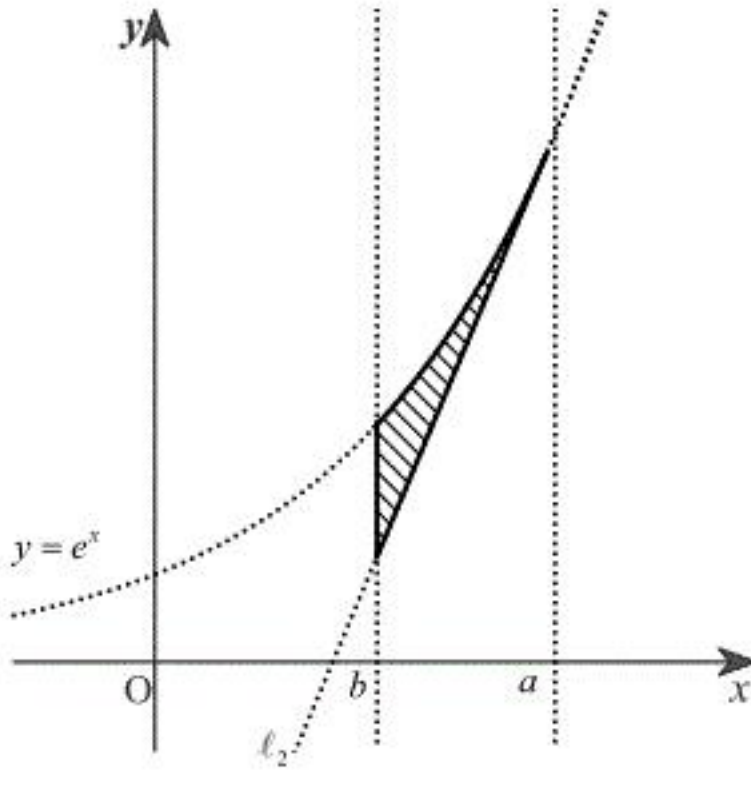
となるため、2 接線 ℓ_1, ℓ_2 の交点の x 座標は $p(a) = \frac{(a-1)e^a + 1}{e^a - 1}$ である。

$$(\text{答}) \quad p(a) = \frac{(a-1)e^a + 1}{e^a - 1}$$

(2)

(1)より、連立不等式 $0 \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq e^x$ の表す領域は下図の斜線部のようになる。上図より、求める面積 S_1 は、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^b (e^x - f(x)) dx \\ &= \int_0^b (e^x - x - 1) dx \\ &= \left[e^x - \frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^b \\ &= e^b - \frac{1}{2}b^2 - b - 1 \end{aligned}$$

となる。また、連立不等式 $b \leq x \leq a, g(x) \leq y \leq e^x$ の表す領域は下図の斜線部のようになる。上図より、求める面積 S_2 は、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_b^a (e^x - g(x)) dx \\ &= \int_b^a \{e^x - e^a x + (a-1)e^a\} dx \\ &= \left[e^x - \frac{1}{2}e^a x^2 + (a-1)e^a x \right]_b^a \\ &= \left\{ e^a - \frac{1}{2}e^a a^2 + (a-1)e^a a \right\} - \left\{ e^b - \frac{1}{2}e^a b^2 + (a-1)e^a b \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}(a-b)^2 - (a-b) + 1 \right\} e^a - e^b \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_1 = e^b - \frac{1}{2}b^2 - b - 1, S_2 = \left\{ \frac{1}{2}(a-b)^2 - (a-b) + 1 \right\} e^a - e^b$$

(3)

(2)より、 $t = a - b$ とおくと、

$$\begin{aligned} R &= e^{-b} S_2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2}(a-b)^2 - (a-b) + 1 \right\} e^{a-b} - 1 \\ &= \left(\frac{1}{2}t^2 - t + 1 \right) e^t - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad R = \left(\frac{1}{2}t^2 - t + 1 \right) e^t - 1$$

(4)

$$\begin{aligned} a - p(a) &= a - \frac{(a-1)e^a + 1}{e^a - 1} \\ &= 1 - \frac{ae^{-a}}{1 - e^{-a}} \end{aligned}$$

となるため、求める極限値は、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} (a - p(a)) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{ae^{-a}}{1 - e^{-a}} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} (a - p(a)) = 1$$

(5)

(4)より、 $b = p(a)$ とするとき、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} t &= \lim_{a \rightarrow \infty} (a - b) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} (a - p(a)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} R &= \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ \left(\frac{1}{2}t^2 - t + 1 \right) e^t - 1 \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 + 1 \right) e^1 - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2}e - 1 \end{aligned}$$

である。また、(1)より、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} b &= \lim_{a \rightarrow \infty} p(a) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(a-1)e^a + 1}{e^a - 1} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a-1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

であり、(2)より、 $S_1 = e^b - \frac{1}{2}b^2 - b - 1$ であるため、

$$e^{-b} S_1 = 1 - \left(\frac{1}{2}b^2 + b + 1 \right) e^{-b}$$

となる。よって、 $\lim_{b \rightarrow \infty} b e^{-b} = \lim_{b \rightarrow \infty} b^2 e^{-b} = 0$ より、 $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-b} S_1 = 1$ であるため、求める極限値は、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{R}{e^{-b} S_1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}e - 1}{1} \\ &= \frac{1}{2}e - 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}e - 1$$

(1)

$$\begin{aligned}
& (A-tE)(A^2+tA+t^2E) \\
&= A \cdot A^2 + A \cdot tA + A \cdot t^2E - tE \cdot A^2 - tE \cdot tA - tE \cdot t^2E \\
&= A^3 + tA^2 + t^2A - tA^2 - t^2A - t^3E \\
&= A^3 - t^3E \\
&= (1-t^3)E \quad (\because A^3 = E)
\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (A-tE)(A^2+tA+t^2E) = (1-t^3)E$$

(2)

t は実数であるため、 $t \neq 1$ のとき、 $1-t^3 \neq 0$ である。よって、(1)より、

$$(A-tE) \left\{ \frac{1}{1-t^3} (A^2+tA+t^2E) \right\} = E$$

が成り立つため、 $A-tE$ の逆行列が存在し、

$$(A-tE)^{-1} = \frac{1}{1-t^3} (A^2+tA+t^2E)$$

となる。

(証明終)

(3)(i)

$A=E$ ならば、

$$\begin{aligned}
A^2 + A + E &= E^2 + E + E \\
&= 3E \\
&\neq O
\end{aligned}$$

である。

(証明終)

(ii)

(1)において、 $t=1$ とすると、

$$(A-E)(A^2+A+E) = O$$

が成り立つ。ここで、命題「 $A^2+A+E \neq O$ ならば、 $A-E$ は逆行列をもたない。」の対偶

「 $A-E$ が逆行列をもつならば、 $A^2+A+E=O$ である。」が真であることを示す。 $A-E$ が逆行列をもつならば、上式より、

$$\begin{aligned}
& (A-E)^{-1} \{ (A-E)(A^2+A+E) \} = (A-E)^{-1} O \\
& \Leftrightarrow E(A^2+A+E) = O \\
& \therefore A^2+A+E = O
\end{aligned}$$

となる。よって、対偶「 $A-E$ が逆行列をもつならば、 $A^2+A+E=O$ である」は真であるため、命題「 $A^2+A+E \neq O$ ならば、 $A-E$ は逆行列をもたない」は真である。

(証明終)

(iii)

a, b, c, d を実数として、 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $p = a+d$, $q = ad-bc$ とおく。このとき、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$\begin{aligned}
& A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \\
& \Leftrightarrow A^2 = pA - qE
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $A-E = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$ は逆行列をもたないとする、

$$\begin{aligned}
& (a-1)(d-1) - bc = 0 \\
& \Leftrightarrow ad - bc = a + d - 1 \\
& \therefore q = p - 1
\end{aligned}$$

となる。よって、 $A^2 = pA - (p-1)E$ であるため、 $A^3 = E$ より、

$$\begin{aligned}
O &= A^3 - E \\
&= AA^2 - E \\
&= A \{ pA - (p-1)E \} - E \\
&= pA^2 - (p-1)A - E \\
&= p \{ pA - (p-1)E \} - (p-1)A - E \\
&= (p^2 - p + 1)(A - E)
\end{aligned}$$

となる。また、 p は実数であるため、

$$p^2 - p + 1 = \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
O &= (p^2 - p + 1)(A - E) \\
&\Leftrightarrow O = A - E \\
&\therefore A = E
\end{aligned}$$

である。

(証明終)

(1)

$l (0 \leq l \leq n)$ を整数、賞金を M とし、 $M=l$ となる確率を q_l とする。また、1 回試行 T を行い $M=l$ となる確率を ${}_1q_l$ 、2 回試行 T を行い $M=l$ となる確率を ${}_2q_l$ とすると、 $q_l = {}_1q_l + {}_2q_l$ が成り立つ。ここで、1 回の試行 T にて得られるポイントが k 未満となる確率は $\sum_{j=0}^{k-1} p_j$ であるため、①より、

$$0 \leq l \leq k-1 \text{ のとき, } {}_1q_l = 0$$

$$k \leq l \leq n \text{ のとき, } {}_1q_l = p_l$$

であり、②より、

$${}_2q_l = p_l \sum_{j=0}^{k-1} p_j$$

である。よって、 $q_l = {}_1q_l + {}_2q_l$ より、賞金 M の期待値は、

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{l=0}^n l q_l \\ &= \sum_{l=0}^n l {}_1q_l + \sum_{l=0}^n l {}_2q_l \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} l {}_1q_l + \sum_{l=k}^n l {}_1q_l + \sum_{l=0}^n l {}_2q_l \\ &= 0 + \sum_{l=k}^n l p_l + \sum_{l=0}^n l \left(p_l \sum_{j=0}^{k-1} p_j \right) \\ &= \left(\sum_{l=0}^n l p_l \right) \left(\sum_{j=0}^{k-1} p_j \right) + \sum_{j=k}^n j p_j \end{aligned}$$

と表すことができる。また、 a は試行 T を 1 回行って得られるポイントの期待値であるため、

$$a = \sum_{l=0}^n l p_l$$

となる。よって、

$$b_k = a \sum_{l=0}^{k-1} p_l + \sum_{j=k}^n j p_j$$

が成り立つ。

$$(\text{答}) \quad b_k = a \sum_{j=0}^{k-1} p_j + \sum_{j=k}^n j p_j$$

(2)

$n=1$ のとき、整数 k のとりうる値は $k=1$ のみであり、 $a=p_1, A=1$ である。 $n \geq 2$ のとき、(1)

より、自然数 $k (1 \leq k \leq n-1)$ に対し、

$$\begin{aligned} b_{k+1} - b_k &= \left(a \sum_{l=0}^k p_l + \sum_{l=k+1}^n l p_l \right) - \left(a \sum_{l=0}^{k-1} p_l + \sum_{l=k}^n l p_l \right) \\ &= a \left(\sum_{l=0}^k p_l - \sum_{l=0}^{k-1} p_l \right) - \left(\sum_{l=k}^n l p_l - \sum_{l=k+1}^n l p_l \right) \\ &= (a-k) p_k \end{aligned}$$

である。また、任意の整数 $l (0 \leq l \leq n)$ に対し、 $p_l > 0$ であるため、

$$\begin{aligned} b_k &\leq b_{k+1} \\ \Leftrightarrow b_{k+1} - b_k &\geq 0 \\ \Leftrightarrow k &\leq a \\ \therefore k &\leq A-1 \end{aligned}$$

$$b_k > b_{k+1}$$

$$\Leftrightarrow b_{k+1} - b_k < 0$$

$$\Leftrightarrow k > a$$

$$\therefore k \geq A$$

が成り立つ。よって、

$$b_1 \leq \dots \leq b_{A-1} \leq b_A > b_{A+1} > \dots > b_n$$

となるため、期待値 b_k は $k=A$ のとき最大となる。

(証明終)

(3)

$l (0 \leq l \leq n)$ を整数、賞金を M とし、 $M=l$ となる確率を r_l とする。また、1 回試行 T を行い $M=l$ となる確率を ${}_1r_l$ 、2 回試行 T を行い $M=l$ となる確率を ${}_2r_l$ 、3 回試行 T を行い $M=l$ となる確率を ${}_3r_l$ とすると、 $r_l = {}_1r_l + {}_2r_l + {}_3r_l$ が成り立つ。ここで、1 回の試行 T にて得られるポイントが m 未満となる確率は $\sum_{j=0}^{m-1} p_j$ 、1 回の試行 T にて得られるポイントが A 未満となる

確率は $\sum_{j=0}^{A-1} p_j$ であるため、①より、

$$0 \leq l \leq m-1 \text{ のとき, } {}_1r_l = 0$$

$$m \leq l \leq n \text{ のとき, } {}_1r_l = p_l$$

であり、②より、

$$0 \leq l \leq A-1 \text{ のとき, } {}_2r_l = 0$$

$$A \leq l \leq n \text{ のとき, } {}_2r_l = p_l \sum_{j=0}^{m-1} p_j$$

であり、③より、

$${}_3r_l = p_l \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j \right) \left(\sum_{j=0}^{A-1} p_j \right)$$

である。よって、 $r_l = {}_1r_l + {}_2r_l + {}_3r_l$ より、賞金 M の期待値は、

$$\begin{aligned} c_m &= \sum_{l=0}^n l r_l \\ &= \sum_{l=0}^n l {}_1r_l + \sum_{l=0}^n l {}_2r_l + \sum_{l=0}^n l {}_3r_l \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} l {}_1r_l + \sum_{l=m}^n l {}_1r_l + \sum_{l=0}^{A-1} l {}_2r_l + \sum_{l=A}^n l {}_2r_l + \sum_{l=0}^{A-1} l {}_3r_l \\ &= 0 + \sum_{l=m}^n l p_l + 0 + \sum_{l=A}^n l \left(p_l \sum_{j=0}^{m-1} p_j \right) \\ &\quad + \sum_{l=0}^n l \left\{ p_l \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j \right) \left(\sum_{j=0}^{A-1} p_j \right) \right\} \\ &= \sum_{l=m}^n l p_l + \left(\sum_{l=A}^n l p_l \right) \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j \right) + \left(\sum_{l=0}^n l p_l \right) \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j \right) \left(\sum_{j=0}^{A-1} p_j \right) \\ &= a \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j \right) \left(\sum_{j=0}^{A-1} p_j \right) + \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j \right) \left(\sum_{j=A}^n j p_j \right) + \sum_{j=m}^n j p_j \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c_m = a \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j \right) \left(\sum_{j=0}^{A-1} p_j \right) + \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j \right) \left(\sum_{j=A}^n j p_j \right) + \sum_{j=m}^n j p_j$$

(4)

$n=1$ のとき、整数 m のとりうる値は $m=1$ のみであり、 $a=p_1, A=1$ である。また、(3)より、自然数 $m (1 \leq m \leq n)$ に対し、

$$\begin{aligned} c_m &= a \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j \right) \left(\sum_{j=0}^{A-1} p_j \right) + \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j \right) \left(\sum_{j=A}^n j p_j \right) + \sum_{j=m}^n j p_j \\ &= \left(a \sum_{j=0}^{A-1} p_j + \sum_{j=A}^n j p_j \right) \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j \right) + \sum_{j=0}^n j p_j - \sum_{j=0}^{m-1} j p_j \\ &= b_A \sum_{j=0}^{m-1} p_j + a - \sum_{j=0}^{m-1} j p_j \\ &= a + \sum_{j=0}^{m-1} (b_A - j) p_j \end{aligned}$$

となるため、 $n \geq 2$ のとき、自然数 $m (1 \leq m \leq n-1)$ に対し、

$$\begin{aligned} c_{m+1} - c_m &= \left\{ a + \sum_{j=0}^m (b_A - j) p_j \right\} - \left\{ a + \sum_{j=0}^{m-1} (b_A - j) p_j \right\} \\ &= (b_A - m) p_m \end{aligned}$$

である。さらに、任意の整数 $l (0 \leq l \leq n)$ に対し、 $p_l > 0$ であるため、

$$\begin{aligned} c_m &\leq c_{m+1} \\ \Leftrightarrow c_{m+1} - c_m &\geq 0 \\ \Leftrightarrow m &\leq b_A \\ \therefore m &\leq B-1 \\ c_m &> c_{m+1} \\ \Leftrightarrow c_{m+1} - c_m &< 0 \\ \Leftrightarrow m &> b_A \\ \therefore m &\geq B \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$c_1 \leq \dots \leq c_{B-1} \leq c_B > c_{B+1} > \dots > c_n$$

となるため、期待値 c_m は $m=B$ のとき最大となる。ここで、 $[b_A] \leq b_A < [b_A]+1$ より、

$B-b_A > 0$ となるため、任意の自然数 $j (B \leq j \leq n)$ に対し、

$$j - b_A \geq B - b_A > 0$$

が成り立つ。また、任意の整数 $l (0 \leq l \leq n)$ に対し、 $p_l > 0$ であるため、

$$\begin{aligned} c_B - b_A &= a + \sum_{j=0}^{B-1} (b_A - j) p_j - b_A \\ &= \sum_{j=0}^n j p_j + \sum_{j=0}^{B-1} (b_A - j) p_j - b_A \sum_{j=0}^n p_j \\ &= \sum_{j=0}^{B-1} j p_j + \sum_{j=B}^n j p_j + \sum_{j=0}^{B-1} (b_A - j) p_j - b_A \sum_{j=0}^{B-1} p_j - b_A \sum_{j=B}^n p_j \\ &= \sum_{j=B}^n (j - b_A) p_j \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 $c_B \geq b_A$ である。

(証明終)

(5)(i)

整数 $k (0 \leq k \leq 5)$ に対し、

$$\begin{aligned} p_k &= {}_5C_k \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^k \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{5-k} \\ &= \frac{{}_5C_k}{32} \end{aligned}$$

であるため、

$$p_0 = \frac{1}{32}, p_1 = \frac{5}{32}, p_2 = \frac{5}{16}, p_3 = \frac{5}{16}, p_4 = \frac{5}{32}, p_5 = \frac{1}{32}$$

となる。また、期待値 a は、

$$\begin{aligned} a &= \sum_{l=0}^5 l p_l \\ &= 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{5}{16} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_0 = \frac{1}{32}, p_1 = \frac{5}{32}, p_2 = \frac{5}{16}, p_3 = \frac{5}{16}, p_4 = \frac{5}{32}, p_5 = \frac{1}{32}, a = \frac{5}{2}$$

(ii)

(i)より、

$$\begin{aligned} A &= [a] + 1 \\ &= \left[\frac{5}{2} \right] + 1 \\ &= \left[2 + \frac{1}{2} \right] + 1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

であるため、(2)より、期待値 b_k は $k=3$ のとき、最大値

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{5}{2} \sum_{l=0}^2 p_l + \sum_{l=3}^5 l p_l \\ &= \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{5}{16} \right) + \left(3 \cdot \frac{5}{16} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} \right) \\ &= \frac{95}{32} \end{aligned}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{95}{32}$$

(iii)

(ii)より、

$$\begin{aligned} B &= [b_A] + 1 \\ &= \left[\frac{95}{32} \right] + 1 \\ &= \left[2 + \frac{31}{32} \right] + 1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

であるため、(4)より、期待値 c_m は $m=3$ のとき、最大値

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{5}{2} + \sum_{j=0}^2 (b_A - j) p_j \\ &= \frac{5}{2} + \left(\frac{95}{32} - 0 \right) \cdot \frac{1}{32} + \left(\frac{95}{32} - 1 \right) \cdot \frac{5}{32} + \left(\frac{95}{32} - 2 \right) \cdot \frac{5}{16} \\ &= \frac{205}{64} \end{aligned}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{205}{64}$$