

平成26年度 数 学

問題の選択方法

- 教育学部, 農学部, 工学部環境建設工学科社会デザインコースの受験者は,
① ② ③ ④ の4問
- 理学部, 工学部(環境建設工学科社会デザインコースを除く)の受験者は,
④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ の5問
- 医学部の受験者は,
④ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ の5問

を解答すること。

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで, この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は, 18 ページあります。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は, 手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答は, すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。やむをえない場合は, 解答用紙の裏も使用してよい。ただし, 裏を使用する場合は, その旨を解答用紙の表に明記し, 裏に書かれた指示に従って解答すること。
- 4 問題冊子の余白は下書きに使用してよい。

次の問いに答えよ。

- (1) $AB = 1$, $\angle A = 90^\circ$ を満たす直角二等辺三角形 ABC において, 辺 AB の中点を P , 辺 AC を $2:1$ に内分する点を Q , 線分 CP と線分 BQ の交点を R とする。このとき, 線分 AR の長さを求めよ。
- (2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{26}$ を小数で表すと, 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし, 必要ならば $\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算せよ。
- (3) k を実数とし, 不等式 $x^2 - 2x - 3 > 0$, $x^2 - (k+1)x + k > 0$ を満たす実数 x の集合をそれぞれ A , B とする。このとき, $A \subset B$ であるための必要十分条件を k を用いて表せ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

2

(教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース)

t, x は実数とする。関数 $f(t)$ を $f(t) = 2|t - 1| + t + 1$ と定義し、
 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ とおく。

- (1) 関数 $y = f(t)$ のグラフをかけ。
- (2) 関数 $F(x)$ を求めよ。
- (3) 曲線 $y = F(x)$ 上の点 $(0, F(0))$ における接線 ℓ の方程式を求めよ。
- (4) 曲線 $y = F(x)$ と (3) で求めた接線 ℓ とで囲まれた図形の面積を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

3

(教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース)

A は 3 桁^{けた}の自然数で、その百の位の数 x 、十の位の数 y 、一の位の数 z は、

$$100x + 10y + z = x! + y! + z!$$

を満たしている。

- (1) $6!$ の値を求め、 x 、 y 、 z はすべて 5 以下であることを示せ。
- (2) x は 3 以下であることを示せ。
- (3) y 、 z のうち少なくとも 1 つは 5 であることを示せ。
- (4) A を求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

n を 0 以上の整数とする。点 P , Q は、1 辺の長さが 1 である正四面体 $ABCD$ の頂点の上を、以下の条件 (a), (b) を満たしながら移動する。

- (a) 時刻 $t = 0$ において、点 P は頂点 A に、点 Q は頂点 B にいる。
- (b) 時刻 $t = n + 1$ において、点 P と点 Q は各々、時刻 $t = n$ のときにいた頂点から、他の 3 つの頂点のいずれかに、それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で移動する。

時刻 $t = n$ における点 P と点 Q の間の距離を d_n とおく。 d_n の値は 0 または 1 である。時刻 $t = n$ において $d_n = 1$ となる確率を p_n とする。

- (1) 時刻 $t = 1$ とする。
 - (i) 点 P が頂点 C にいるとき、 $d_1 = 1$ となる点 Q の位置は何通りか。
 - (ii) 点 P が頂点 B にいるとき、 $d_1 = 1$ となる点 Q の位置は何通りか。
- (2) p_1 を求めよ。
- (3) $d_1 + d_2 = 1$ となる確率を求めよ。
- (4) p_{n+1} を p_n で表し、 p_n を求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

5

(理学部・工学部(環境建設工学科社会デザインコースを除く))

次の問いに答えよ。

- (1) すべての実数 x に対して

$$f(x) = \sin \pi x + \int_0^1 t f(t) dt$$

が成り立つような関数 $f(x)$ を求めよ。

- (2) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^3}{\tan \theta - \sin \theta}$$

- (3) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

- (4) 関数 $f(x) = |x|(e^x + a)$ は $x = 0$ において微分可能であるとする。このとき、定数 a の値を求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

n は自然数, m は整数, k, α, β は実数とする。

- (1) $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$ のとき, $\alpha\beta \geq \alpha + \beta - 1$ が成り立つことを示せ。
- (2) x に関する 2 次方程式 $x^2 - mx + k = 0$ の 2 つの解を p, q とする。 p が整数ならば, q と k も整数であることを示せ。
- (3) x に関する 2 次方程式 $x^2 - n^2x + n = 0$ は, 整数の解をもたないことを示せ。
- (4) x に関する 2 次方程式 $x^2 - (n-2)^2x + n = 0$ が整数の解をもつとき, n の値とその解をすべて求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

a, b は, $0 < b < a$ を満たす実数とする。曲線 $y = e^x$ 上の点 $(0, 1)$ における接線 ℓ_1 の方程式を $y = f(x)$, 点 (a, e^a) における接線 ℓ_2 の方程式を $y = g(x)$ とおく。また, ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標を $p(a)$ とする。連立不等式

$$0 \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq e^x$$

の表す領域の面積を S_1 , 連立不等式

$$b \leq x \leq a, \quad g(x) \leq y \leq e^x$$

の表す領域の面積を S_2 とし, $R = e^{-b} S_2$ とおく。このとき, 次の問いに答えよ。必要ならば, すべての自然数 k に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = 0$ が成り立つことを用いてよい。

- (1) $p(a)$ を求めよ。
- (2) S_1 と S_2 を求めよ。
- (3) $t = a - b$ とする。 R を t のみの関数として表せ。
- (4) 極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} (a - p(a))$ を求めよ。
- (5) $b = p(a)$ とする。このとき, 極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

8

(理学部・工学部(環境建設工学科社会デザインコースを除く)・医学部)

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とし, t は実数とする。 A は, $A^3 = E$ を満たす 2 次の正方行列とする。

- (1) $(A - tE)(A^2 + tA + t^2E)$ を t と E を用いて表せ。
- (2) $t \neq 1$ のとき $A - tE$ は逆行列をもつことを示せ。
- (3) 次の 3 つの命題を証明せよ。
 - (i) $A = E$ ならば, $A^2 + A + E \neq O$ である。
 - (ii) $A^2 + A + E \neq O$ ならば, $A - E$ は逆行列をもたない。
 - (iii) $A - E$ が逆行列をもたないならば, $A = E$ である。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

9 (医学部)

n は自然数, $p_0, p_1, \dots, p_n$ は $p_0 > 0, p_1 > 0, \dots, p_n > 0$ かつ
 $p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1$ を満たす定数とする。ポイント

$$0, 1, 2, \dots, n-1, n$$

が, それぞれ

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$$

の確率で得られる試行 T を考える。試行 T を 1 回行って得られるポイントの期待値を a とし, $A = [a] + 1$ とする。ただし, 実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

競技者は, 試行 T を下記の各設問のルールに従って何回か行う。

(1) k を $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。競技者は, 試行 T を以下のルールに従って最大 2 回まで行う。

- ① 試行 T を 1 回行い, もしポイントが k 以上であれば 2 回目の試行を行わず, このポイントを賞金とする。
- ② 1 回目のポイントが k 未満であれば 2 回目の試行 T を行う。このとき, 1 回目のポイントは無効とし, 2 回目のポイントを賞金とする。

このとき賞金の期待値を b_k とする。 b_k を求めよ。

(2) (1) の期待値 b_k は k が A のとき最大となることを示せ。

(3) m を $1 \leq m \leq n$ を満たす整数とする。競技者は、試行 T を以下のルールに従って最大 3 回まで行う。

- ① 試行 T を 1 回行い、もしポイントが m 以上であれば 2 回目以降の試行を行わず、このポイントを賞金とする。
- ② 1 回目のポイントが m 未満であれば 2 回目の試行 T を行う。2 回目のポイントが A 以上であれば 3 回目の試行を行わない。このとき、1 回目のポイントは無効とし、2 回目のポイントを賞金とする。
- ③ 2 回目のポイントが A 未満であれば 3 回目の試行 T を行う。このとき、1 回目、2 回目のポイントは無効とし、3 回目のポイントを賞金とする。

このとき賞金の期待値を c_m とする。 c_m を求めよ。

(4) (3) の期待値 c_m は m が $B = [b_A] + 1$ のとき最大となり、 $c_B \geq b_A$ であることを示せ。ただし、 b_A は (1) で求めた期待値 b_k の $k = A$ のときの値である。

(5) $n = 5$ とし、試行 T として、5 枚の硬貨を同時に投げ、表の出た枚数をポイントとする試行を考える。また、 b_k 、 c_m は上記で定義したものとする。

- (i) $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, a$ を求めよ。
- (ii) (1) のように最大 2 回試行を行う場合、 b_k の最大値を求めよ。
- (iii) (3) のように最大 3 回試行を行う場合、 c_m の最大値を求めよ。