

1

(1)

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2+\sqrt{5}$$

であり、 $4 < 5 < 9$ より、 $2 < \sqrt{5} < 3$ である。したがって、 $4 < 2+\sqrt{5} < 5$ より、 $2+\sqrt{5}$ の整数部分は4だから

$$\begin{aligned} a &= 2+\sqrt{5}-4 \\ &= \sqrt{5}-2 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} a^2+4a+5 &= (a+2)^2+1 \\ &= (\sqrt{5})^2+1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 6

(2)

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1 \\ x \log_2 x - y \log_2 y = 0 \end{cases}$$

について、真数条件から $x > 0, y > 0$ である。また、

$$\begin{aligned} \log_2 x - \log_2 y &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{x}{y} &= \log_2 2 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{y} &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= 2y \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} x \log_2 x - y \log_2 y &= 0 \\ \Leftrightarrow 2y \log_2 (2y) - y \log_2 y &= 0 \\ \Leftrightarrow 2y (\log_2 2 + \log_2 y) - y \log_2 y &= 0 \\ \Leftrightarrow y (2 + \log_2 y) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 + \log_2 y &= 0 \quad (\because y > 0) \\ \therefore y &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、 $x = 2y = \frac{1}{2}$ となる。

(答) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$

(3)

4点O, A, B, Cは同一平面上にあり、 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は1次独立であるから、実数 u, v を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= u\overrightarrow{OB} + v\overrightarrow{OC} \\ &= (2u, 3u+5v, 2u+v) \end{aligned}$$

と書ける。したがって、 $\overrightarrow{OA} = (4, s, t)$ より、

$$\begin{cases} 2u = 4 \\ 3u + 5v = s \\ 2u + v = t \end{cases} \\ \therefore u = 2, s = 5v + 6, t = v + 4$$

となる。ここで、 $\angle AOB = 90^\circ$ より $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow 8 + 3s + 2t &= 0 \\ \Leftrightarrow 17v + 34 &= 0 \\ \therefore v &= -2 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $s = -4, t = 2$ と求まる。

(答) $s = -4, t = 2$

(4)

初項が3、公比が4であるような等比数列の第 k 項 a_k は、 $a_k = 3 \cdot 4^{k-1}$ と書けるから、

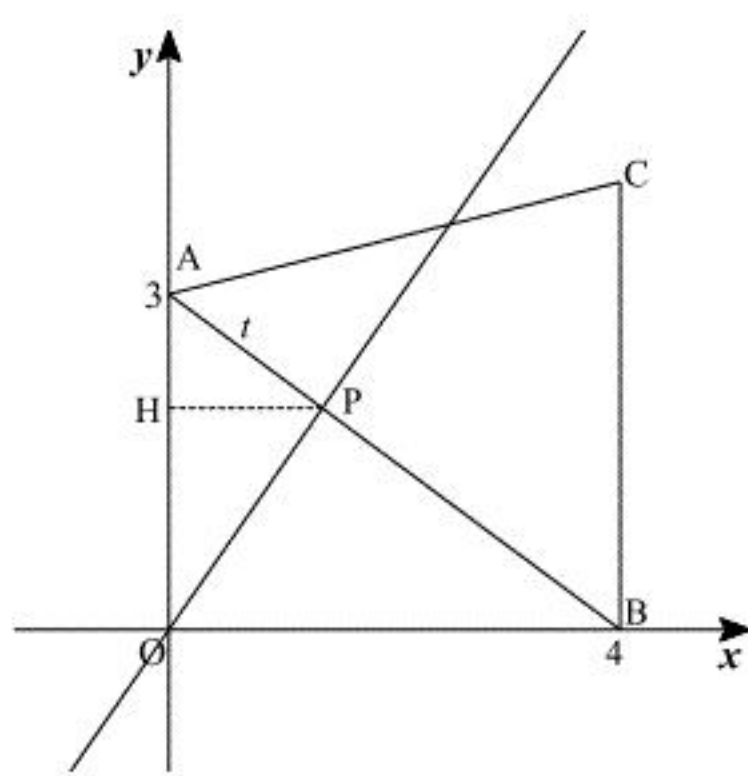
$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n^2} a_k &= \sum_{k=1}^{n^2} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n^2} 3 \cdot 4^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 4^{k-1} \\ &= 3 \cdot \frac{1-4^{n^2}}{1-4} - 3 \cdot \frac{1-4^{n-1}}{1-4} \\ &= 4^{n^2} - 4^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $4^{n^2} - 4^{n-1}$

2

(1)



$A(0, 3), B(4, 0)$ より,

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

となる。点 P は線分 AB の端点にはないから、 t の値の範囲は、 $0 < t < 5$ となる。 $AP = t$ だから、点 P から y 軸に下した垂線の足を H とおくと、点 P の x 座標は $\triangle AHP$ と $\triangle AOB$ の相似に注目して、

$$P\left(4 \times \frac{t}{5}, 3 - 3 \times \frac{t}{5}\right) = P\left(\frac{4t}{5}, \frac{3(5-t)}{5}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 < t < 5, P\left(\frac{4t}{5}, \frac{3(5-t)}{5}\right)$$

(2)

直線 OP が線分 AC と共有点を持つような t で、最大の t は直線 OP が点 C を通るときに対応する。したがって、(1)より直線 OP の式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\frac{3(5-t)}{5}}{\frac{4t}{5}} x \quad (\because t > 0) \\ &= \frac{3(5-t)}{4t} x \end{aligned}$$

より、この直線が $C(4, 4)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{3(5-t)}{4t} \cdot 4 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{15}{7} \end{aligned}$$

となる。したがって、 t の範囲は $0 < t \leq \frac{15}{7}$ である。また、直線 AC の式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{4-3}{4-0} x + 3 \\ &= \frac{1}{4} x + 3 \end{aligned}$$

より、交点の座標は

$$\begin{cases} y = \frac{3(5-t)}{4t} x \\ y = \frac{1}{4} x + 3 \end{cases}$$

$$\therefore x = \frac{12t}{15-4t}, y = \frac{9(5-t)}{15-4t}$$

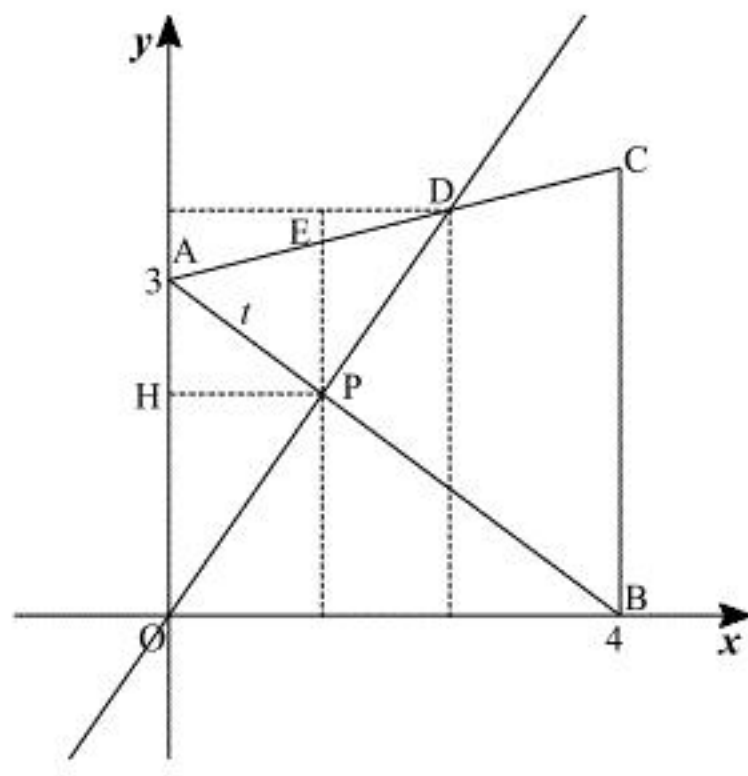
となる。

$$(\text{答}) \quad 0 < t \leq \frac{15}{7}, \left(\frac{12t}{15-4t}, \frac{9(5-t)}{15-4t}\right)$$

(3)

t の値によって場合分けをする。

[1] $0 < t \leq \frac{15}{7}$ のとき



直線 OP と線分 AC との交点を D とし、また点 P と同じ x 座標で線分 AC 上の点を E とおく。求める面積は $\triangle APD$ の面積である。ここで、 $\triangle APD$ の底辺を PE とみなすと、高さは点 D の x 座標に対応する。したがって、点 E の y 座標は(2)より

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4t}{5} + 3 \\ &= \frac{t}{5} + 3 \end{aligned}$$

より、

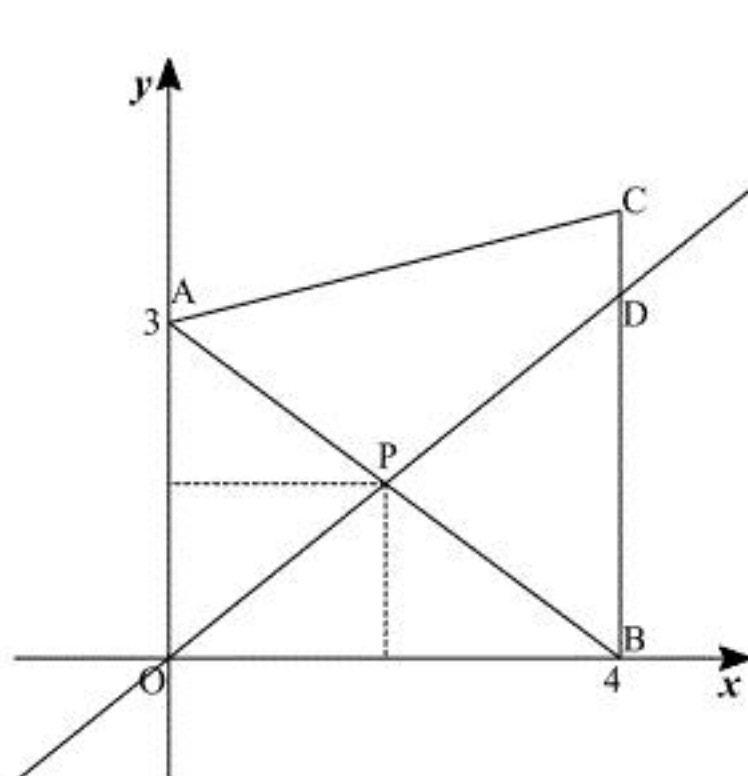
$$\begin{aligned} PE &= \frac{t}{5} + 3 - \left\{ \frac{3(5-t)}{5} \right\} \\ &= \frac{4t}{5} \end{aligned}$$

となり、(2)より点 D の x 座標は $\frac{12t}{15-4t}$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4t}{5} \cdot \frac{12t}{15-4t} \\ &= \frac{24t^2}{5(15-4t)} \end{aligned}$$

と求まる。

[2] $\frac{15}{7} < t < 5$ のとき



直線 OP と線分 AC との交点を D とすると、求めたい面積は四角形 APDC である。そこで、この面積を $\triangle ABC$ の面積から $\triangle PDB$ の面積を引くことによって求める。まず、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$$

となる。次に、 $\triangle PDB$ について、直線 OP と線分 BC との交点である D の y 座標を求めると、

$$\begin{aligned} y &= \frac{3(5-t)}{4t} \cdot 4 \\ &= \frac{3(5-t)}{t} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle PDB$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \left(4 - \frac{4t}{5}\right) \cdot \frac{3(5-t)}{t} = \frac{6(5-t)^2}{5t}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} S &= 8 - \frac{6(5-t)^2}{5t} \\ &= \frac{-6t^2 + 100t - 150}{5t} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad 0 < t \leq \frac{15}{7} \text{ のとき } S = \frac{24t^2}{5(15-4t)}, \quad \frac{15}{7} < t < 5 \text{ のとき } S = \frac{-6t^2 + 100t - 150}{5t}$$

(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + a$$

であり、 $f(x)$ が極大値、極小値を持つことから、 $f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解を持たなければならない。したがって、2 次方程式 $3x^2 + 4x + a = 0$ の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow 4 - 3a &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3} &> a \end{aligned}$$

を満たす必要がある。ここで、 a が自然数であることを考慮すると、上の条件を満たす a は $a = 1$ のみであることがわかる。(証明終)

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 + x + 4 \\ f'(x) &= 3x^2 + 4x + 1 \\ &= (x+1)(3x+1) \end{aligned}$$

となり、

$$f(-1) = 4, f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{104}{27}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表を書くと以下のようになる。

x	...	-1	...	$-\frac{1}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	$\frac{104}{27}$	↗

したがって、点 P で極大値、点 Q で極小値を取るため、

$$P(-1, 4), Q\left(-\frac{1}{3}, \frac{104}{27}\right)$$

となる。

(答) $P(-1, 4), Q\left(-\frac{1}{3}, \frac{104}{27}\right)$

(3)

(2)より、点 P, Q の中点 R は

$$R\left(\frac{(-1) + \left(-\frac{1}{3}\right)}{2}, \frac{4 + \frac{104}{27}}{2}\right) = R\left(-\frac{2}{3}, \frac{106}{27}\right)$$

となる。このとき、

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{106}{27}$$

より、点 R は曲線 $y = f(x)$ 上にある。

(証明終)

(4)

点 R における曲線 $y = f(x)$ の接線の式は

$$\begin{aligned} y &= f'\left(-\frac{2}{3}\right)\left\{x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right\} + \frac{106}{27} \\ &= -\frac{1}{3}x + \frac{100}{27} \end{aligned}$$

となる。したがって、この接線と曲線 $y = f(x)$ との交点は

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + x + 4 &= -\frac{1}{3}x + \frac{100}{27} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、点 R における曲線 $y = f(x)$ の接線は点 R 以外に $y = f(x)$ との共有点を持たない。

(証明終)

(1)

積 $X_1 X_2 X_3$ が 0 となるとき、 $X_1 = 0$ または $X_2 = 0$ または $X_3 = 0$ である。これらは排反であるから、求める確率は、

$$\frac{1}{4n+1} \times 3 = \frac{3}{4n+1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{4n+1}$$

(2)

積 $X_1 X_2 X_3$ が実数となるのは、 $X_1 X_2 X_3 = 0$ 、または X_1, X_2, X_3 のうち虚数が偶数個含まれる場合であるため、以下のように場合分けして調べる。

[1] $X_1 X_2 X_3 = 0$ となるとき

(1)より、このときの確率は $\frac{3}{4n+1}$ となる。

[2] $X_1 X_2 X_3 \neq 0$ かつ X_1, X_2, X_3 がすべて実数のとき

X_1, X_2, X_3 を 0 でない実数の書かれた $2n$ 枚のカードから選べばよいから、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_{2n}P_3}{{}_{4n+1}P_3} &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{(4n+1)4n(4n-1)} \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)}{(4n-1)(4n+1)} \end{aligned}$$

となる。

[3] $X_1 X_2 X_3 \neq 0$ かつ X_1, X_2, X_3 のうち1つが実数、2つが虚数のとき

X_1, X_2, X_3 のうちどれを実数に割り当てるのかで ${}_3C_1$ 通り、0 でない実数の書かれた $2n$ 枚のカードから1枚選ぶので $2n$ 通り、0 でない虚数の書かれた $2n$ 枚のカードから2枚選ぶので ${}_{2n}P_2$ 通りあるため、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_3C_1 \cdot 2n \cdot {}_{2n}P_2}{{}_{4n+1}P_3} &= \frac{3 \cdot 2n \cdot 2n(2n-1)}{(4n+1)4n(4n-1)} \\ &= \frac{3n(2n-1)}{(4n-1)(4n+1)} \end{aligned}$$

となる。

以上, [1][2][3]より、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{3}{4n+1} + \frac{(n-1)(2n-1)}{(4n-1)(4n+1)} + \frac{3n(2n-1)}{(4n-1)(4n+1)} &= \frac{2(n+1)(4n-1)}{(4n-1)(4n+1)} \\ &= \frac{2(n+1)}{4n+1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2(n+1)}{4n+1}$$

(3)

和 $X_1 + X_2$ が実数となる場合を以下のように場合分けして調べる。

[1] X_1, X_2 がともに実数のとき

実数が書かれた $2n+1$ 枚のカードの中から X_1, X_2 を選べばよいから、このようになる確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_{2n+1}P_2}{{}_{4n+1}P_2} &= \frac{(2n+1)2n}{(4n+1)4n} \\ &= \frac{2n+1}{2(4n+1)} \end{aligned}$$

となる。

[2] $X_1 = \pm ki, X_2 = \mp ki$ (複号同順)となる場合

k として取り得る値は n 通りあるから、このときの確率は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{{}_{4n+1}P_2} \cdot n \cdot 2 &= \frac{2n}{(4n+1)4n} \\ &= \frac{1}{2(4n+1)} \end{aligned}$$

となる。

以上, [1][2]より、求める確率は

$$\frac{2n+1}{2(4n+1)} + \frac{1}{2(4n+1)} = \frac{n+1}{4n+1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{n+1}{4n+1}$$

(4)

$X_1(X_2 + X_3) = 0$ となる確率を以下のように場合分けして調べる。

[1] $X_1 = 0$ のとき

このとき、 X_2, X_3 の値に関わらず $X_1(X_2 + X_3) = 0$ となるため、確率は

$$\frac{1}{4n+1}$$

となる。

[2] $X_1 \neq 0$ のとき

このとき、 $X_2 + X_3 = 0$ であり、このようになる X_2, X_3 の選び方は

$$X_2 = \pm k, X_3 = \mp k \quad (\text{複号同順})$$

または

$$X_2 = \pm ki, X_3 = \mp ki \quad (\text{複号同順})$$

の $4n$ 通りである。それぞれに対して、0 と選んだ2枚を除いた $4n-2$ 枚の中から X_1 に割り当てる数を決めればよいから、確率は

$$\begin{aligned} \frac{1}{{}_{4n+1}P_2} \cdot 4n \cdot \frac{4n-2}{4n-1} &= \frac{4n(4n-2)}{(4n+1)4n(4n-1)} \\ &= \frac{4n-2}{(4n-1)(4n+1)} \end{aligned}$$

となる。

以上, [1][2]より、求める確率は

$$\frac{1}{4n+1} + \frac{4n-2}{(4n-1)(4n+1)} = \frac{8n-3}{(4n-1)(4n+1)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{8n-3}{(4n-1)(4n+1)}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 \int x^3 e^{x^2} dx &= \int \frac{x^2}{2} \cdot 2xe^{x^2} dx \\
 &= \int \frac{x^2}{2} (e^{x^2})' dx \\
 &= \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \int xe^{x^2} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \int \frac{1}{2} \cdot 2xe^{x^2} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} \int (e^{x^2})' dx \\
 &= \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C
 \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \int x^3 e^{x^2} dx = \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

(2)

$\frac{1}{e} < x < 1$ のとき $\log x < 0$, $1 < x < e$ のとき $\log x > 0$ であることに注意して,

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\log x) dx + \int_1^e \log x dx \\
 &= [-x \log x + x]_{\frac{1}{e}}^1 + [x \log x - x]_1^e \\
 &= 2 - \frac{2}{e}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| dx = 2 - \frac{2}{e}$$

(3)

楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $(\sqrt{2}, 1)$ における接線の式は

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{2} \cdot x}{4} + \frac{1 \cdot y}{2} &= 1 \\
 \therefore y &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$$

(4)

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^3 = 2 + \sqrt{5}$$

であり、 $4 < 5 < 9$ より、 $2 < \sqrt{5} < 3$ である。したがって、 $4 < 2 + \sqrt{5} < 5$ より、 $2 + \sqrt{5}$ の整数部分は4だから

$$\begin{aligned}
 a &= 2 + \sqrt{5} - 4 \\
 &= \sqrt{5} - 2
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{5} - 2 \\
 \Leftrightarrow a + 2 &= \sqrt{5} \\
 \Rightarrow (a + 2)^2 &= 5 \\
 \Leftrightarrow a^2 + 4a - 1 &= 0
 \end{aligned}$$

であり、

$$a^4 + 5a^3 + 4a^2 + 4a = (a^2 + 4a - 1)(a^2 + a + 1) + a + 1$$

となるから、上の式に $a = \sqrt{5} - 2$ を代入して、

$$\begin{aligned}
 a^4 + 5a^3 + 4a^2 + 4a &= (\sqrt{5} - 2) + 1 \\
 &= \sqrt{5} - 1
 \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \sqrt{5} - 1$$

(5)

$$\begin{aligned}
 |b-c|^2 - |b-a|^2 &= (b-c)^2 - (b-a)^2 \\
 &= \{(b-c) - (b-a)\} \{(b-c) + (b-a)\} \\
 &= (a-c)(2b-a-c)
 \end{aligned}$$

となり、 $0 < a < b < c$ より、 $a - c < 0$ である。また、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{b} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{b} &= \frac{a+c}{2ac} \\
 \Leftrightarrow b &= \frac{2ac}{a+c} \quad (\because a+c > 0)
 \end{aligned}$$

であることに注意して、

$$\begin{aligned}
 2b - a - c &= \frac{4ac}{a+c} - a - c \\
 &= \frac{4ac - (a+c)^2}{a+c} \\
 &= \frac{-(c-a)^2}{a+c} < 0 \quad (\because a+c > 0)
 \end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}
 |b-c|^2 - |b-a|^2 &> 0 \\
 \Leftrightarrow |b-c| &> |b-a|
 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(1)

$\vec{u} = (a, b, c)$ とおくと、単位ベクトルであるから、

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、平面 $OABC$ に垂直であるから、 $\vec{u} \perp \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ より、

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

$$\Leftrightarrow -a + 6b - 2c = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

を得る。②③より、

$$c = 3b$$

であるから、①に代入して、

$$b^2 + 9b^2 = 1$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{10}}{10}, c = \frac{3\sqrt{10}}{10} \quad (\because c > 0)$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \vec{u} = \left(0, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10} \right)$$

(2)

$\overrightarrow{OQ} \parallel \vec{u}$ より、 $\overrightarrow{OQ} = s\vec{u}$ とおける。このとき、

$$\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OD}$$

$$= s\vec{u} - \overrightarrow{OD}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{DQ}$ より $\vec{u} \perp \overrightarrow{DQ}$ だから、

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot (s\vec{u} - \overrightarrow{OD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow s = \sqrt{10}$$

となる。したがって、 $\vec{u}$ は単位ベクトルより線分 OQ の長さは $\sqrt{10}$ である。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{10}$$

(3)

点 Q が平行四辺形 $DEFG$ の周または内部にあるとき、 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DG}$ を用いて、

$$\overrightarrow{DQ} = a\overrightarrow{DE} + b\overrightarrow{DG} \quad (0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1)$$

と書ける。また、(2)より、

$$\overrightarrow{DQ} = \sqrt{10}\vec{u} - \overrightarrow{OD}$$

となる。このとき、

$$\sqrt{10}\vec{u} - \overrightarrow{OD} = a\overrightarrow{DE} + b\overrightarrow{DG}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10}\vec{u} - \overrightarrow{OD} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OC}$$

$$\Leftrightarrow (-t, 3, -1) = (3a - b, 6b, -2b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = b - 3a \\ 3 = 6b \\ -1 = -2b \end{cases}$$

$$\therefore t = -3a + \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

となる。よって、 $0 \leq a \leq 1$ より $-\frac{5}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{5}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$$

(4)

点 P から直線 OC に下ろした垂線の足を H とすると、点 P, Q はいずれも平面 α 上にあることから

$$HP \geq OQ$$

が成り立つ。したがって $\triangle OCP$ の面積 S について

$$S \geq \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OQ$$

が成り立ち、

$$OC = \sqrt{(-1)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{41}$$

$$OC = \sqrt{10}$$

より、

$$S \geq \frac{\sqrt{410}}{2}$$

となる。 t が $-\frac{5}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ の範囲にあるとき、点 Q は平行四辺形 $DEFG$ の周または内部にある

ことから、点 P は点 Q に一致させることができる。よって、 S の最小値 m の値は

$$m = \frac{\sqrt{410}}{2}$$

である。また、点 Q を通り直線 OC に平行な直線を l とすると、 $S = m$ となるのは点 P が直線 l 上にあるときである。よって、実数 k を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DP} &= \overrightarrow{DQ} + k\overrightarrow{OC} \\ &= (-k - t, 6k + 3, -2k - 1) \end{aligned}$$

となる。よって、(3)と同様にして、 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DG}$ を用いて、

$$\overrightarrow{DP} = c\overrightarrow{DE} + d\overrightarrow{DG} \quad (0 \leq c \leq 1, 0 \leq d \leq 1)$$

と書ける。このとき、

$$\overrightarrow{DP} = c\overrightarrow{DE} + d\overrightarrow{DG}$$

$$\Leftrightarrow (-t - k, 6k + 3, -2k - 1) = (3c - d, 6d, -2d)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + k = d - 3c \\ 6k + 3 = 6d \\ -2k - 1 = -2d \end{cases}$$

$$\therefore t = -3c + \frac{1}{2}, d = k + \frac{1}{2}$$

となる。よって、 $0 \leq d \leq 1$ より $-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$ となる。このとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} \\ &= (-k, 6k + 1, -2k + 3) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad m = \frac{\sqrt{410}}{2}, P(-k, 6k + 1, -2k + 3) \quad \left(-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}\right)$$

(1)

 $a_1 = a$ より,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 1 \\ &= a + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_2 \\ &= 2a + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + 1 \\ &= 2a + 3 \end{aligned}$$

となり, $b_1 = a$ より

$$\begin{aligned} b_2 &= 2b_1 \\ &= 2a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= b_2 + 1 \\ &= 2a + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= 2b_3 \\ &= 4a + 2 \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} (\text{答}) \quad a_2 &= a + 1, \quad a_3 = 2a + 2, \quad a_4 = 2a + 3 \\ b_2 &= 2a, \quad b_3 = 2a + 1, \quad b_4 = 4a + 2 \end{aligned}$$

(2)

 $c_n = a_{2n}$ のとき,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{2(n+1)} \\ &= a_{2n+2} + 1 \\ &= 2a_{2n} + 1 \\ &= 2c_n + 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow c_{n+1} + 1 = 2(c_n + 1)$$

となる。したがって, 数列 $\{c_n + 1\}$ は初項 $c_1 + 1 = a_2 + 1 = a + 2$, 公比 2 の等差数列より,

$$\begin{aligned} c_n + 1 &= (a + 2) \cdot 2^{n-1} \\ \therefore c_n &= (a + 2) \cdot 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c_n = (a + 2) \cdot 2^{n-1} - 1$$

(3)(i)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{2n} a_k \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{2k} + a_{2k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (2a_{2k} - 1) \quad (\because a_{2k} = a_{2k-1} + 1) \\ &= \sum_{k=1}^n (2c_k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n \{(a + 2) \cdot 2^k - 3\} \\ &= (a + 2) \cdot \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} - 3n \\ &= 2(a + 2)(2^n - 1) - 3n \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S_n = 2(a + 2)(2^n - 1) - 3n$$

(ii)

(2)と同様にして, 数列 $\{d_n\}$ を $d_n = b_{2n}$ とおくと,

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= b_{2(n+1)} \\ &= 2b_{2n+1} \\ &= 2b_{2n} + 2 \\ &= 2d_n + 2 \end{aligned}$$

$$\therefore d_{n+1} = 2d_n + 2$$

$$\Leftrightarrow d_{n+1} + 2 = 2(d_n + 2)$$

となる。したがって, 数列 $\{d_n + 2\}$ は初項 $d_1 + 2 = b_2 + 2 = 2a + 2$, 公比 2 の等差数列より,

$$\begin{aligned} d_n + 2 &= (2a + 2) \cdot 2^{n-1} \\ \therefore d_n &= (a + 1) \cdot 2^n - 2 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{2n} b_k \\ &= \sum_{k=1}^n (b_{2k} + b_{2k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{3}{2} b_{2k} \quad (\because b_{2k} = 2b_{2k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{3}{2} d_k \\ &= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n \{(a + 1) \cdot 2^k - 2\} \\ &= \frac{3}{2} (a + 1) \cdot \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} - \frac{3}{2} \cdot 2n \\ &= 3(a + 1)(2^n - 1) - 3n \end{aligned}$$

となる。したがって, $a = 1$ のとき

$$\begin{aligned} U_n &= S_n - T_n \\ &= \{2 \cdot 3 \cdot (2^n - 1) - 3n\} - \{3 \cdot 2 \cdot (2^n - 1) - 3n\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad U_n = 0$$

(1)

$$f(x) = x - n \sin \frac{x}{n} \text{ とおくと,}$$

$$f'(x) = 1 - \cos \frac{x}{n}$$

であるから、 m を整数とすると

$$\begin{cases} f'(x) = 0 & (x = 2mn\pi) \\ f'(x) > 0 & (x \neq 2mn\pi) \end{cases}$$

となる。このとき、すべての実数 x において $f(x)$ は単調増加である。よって、 $f(0) = 0$ より、

$$x > 0 \text{ では } f(x) > 0, \text{ すなわち } n \sin \frac{x}{n} < x \text{ が成り立つ。}$$

(証明終)

(2)

交点 (p_n, q_n) は第1象限にあるから、

$$p_n > 0, q_n > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、曲線 $y = n \sin \frac{x}{n}$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点であるから、

$$q_n = n \sin \frac{p_n}{n}, p_n^2 + q_n^2 = 1$$

が成り立つ。したがって、(1)より①から

$$q_n = n \sin \frac{p_n}{n} < p_n$$

$$\therefore q_n < p_n$$

であるから、

$$1 = p_n^2 + q_n^2$$

$$< p_n^2 + p_n^2$$

$$= 2p_n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < p_n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < p_n \quad (\because p_n > 0)$$

となる。

(証明終)

(3)(i)

(2)より、 $q_n = n \sin \frac{p_n}{n}$ であるから、

$$p_n^2 + n^2 \sin^2 \frac{p_n}{n} = 1$$

である。ここで、 p_n は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の第1象限にある点の x 座標であるから、 $0 < p_n < 1$ であり、不等式(☆)から、

$$1 = p_n^2 + n^2 \sin^2 \frac{p_n}{n}$$

$$\geq p_n^2 + \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^2 p_n^2$$

$$= \left(1 + n^2 \sin^2 \frac{1}{n} \right) p_n^2$$

$$\therefore \frac{1}{1 + n^2 \sin^2 \frac{1}{n}} \geq p_n^2 \quad \left(\because 1 + n^2 \sin^2 \frac{1}{n} > 0 \right)$$

$$\therefore p_n \leq \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2 \frac{1}{n}}}$$

を得る。

(証明終)

(ii)

$$S_n = \int_0^{p_n} n \sin \frac{x}{n} dx$$

$$= \left[-n^2 \cos \frac{x}{n} \right]_0^{p_n}$$

$$= n^2 \left(1 - \cos \frac{p_n}{n} \right)$$

となる。また、

$$\begin{aligned} n^2 \left(1 - \cos \frac{p_n}{n} \right) &= n^2 \left\{ 1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{p_n}{2n} \right) \right\} \\ &= 2n^2 \sin^2 \frac{p_n}{2n} \\ &= 2 \left(\frac{\sin \frac{p_n}{2n}}{\frac{p_n}{2n}} \right)^2 \frac{p_n^2}{4} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < p_n < 1$ より

$$0 < \frac{p_n}{2n} < \frac{1}{2n}$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{2n} = 0$$

となる。また、(2)と(3)(i)より

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < p_n \leq \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2 \frac{1}{n}}}$$

$$\therefore \frac{1}{2} < p_n^2 \leq \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^2}$$

となる。ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^2} &= \frac{1}{1 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるから、再びはさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^2 = \frac{1}{2}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{\sin \frac{p_n}{2n}}{\frac{p_n}{2n}} \right)^2 \frac{p_n^2}{4} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S_n = n^2 \left(1 - \cos \frac{p_n}{n} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$$

(4)

$$g(x) = n \sin \frac{x}{n} \text{ とおくと,}$$

$$g'(x) = \cos \frac{x}{n}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$$

より、 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	⋯	1
$g'(x)$		+	
$g''(x)$		-	
$g(x)$	0	$\curvearrowright$	$n \sin \frac{1}{n}$

$0 \leq x \leq 1$ で $y = g(x)$ は上に凸であるから、 $(0, 0), \left(1, n \sin \frac{1}{n}\right)$ を結んだ直線 $y = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)x$ の

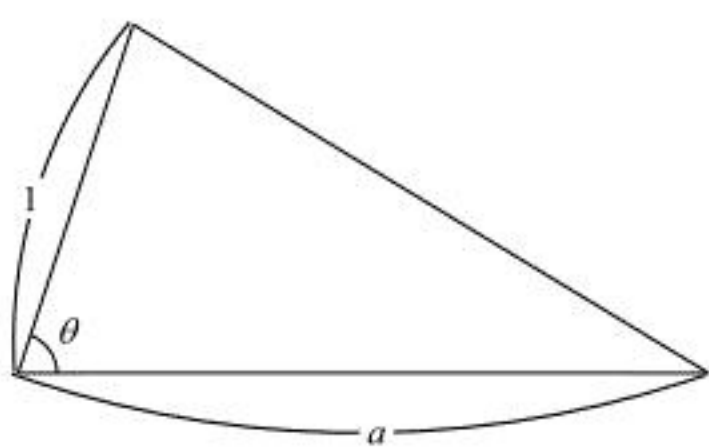
上側にある。したがって、 $0 \leq x \leq 1$ で

$$\left(n \sin \frac{1}{n}\right)x \leq n \sin \frac{x}{n}$$

が成り立つ。

(証明終)

(1)



上図のように、辺の長さが1と a の辺のなす角度を θ とおくと、面積は $\frac{1}{2}a\sin\theta$ となる。ここ

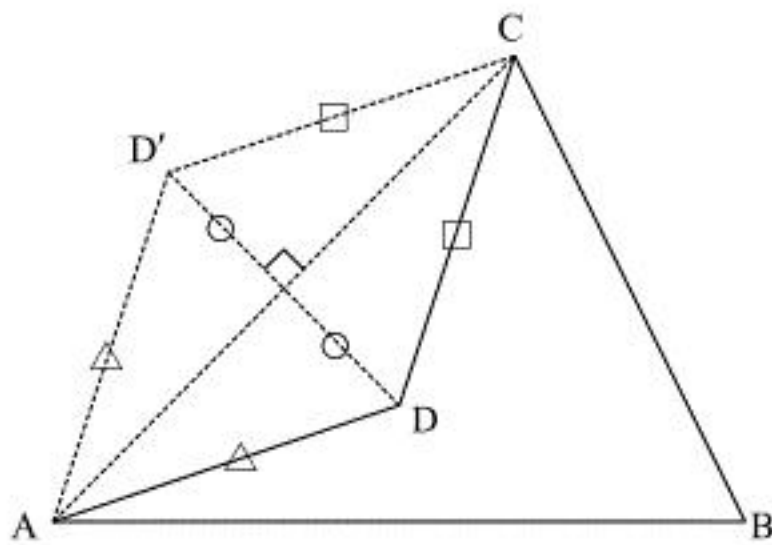
で、 $0 < \theta < \pi$ より、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき三角形の面積は最大値 $\frac{1}{2}a$ をとる。したがって、三角形は直角三角形となるから、残りの辺の長さは三平方の定理より、

$$\sqrt{1^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + 1}$$

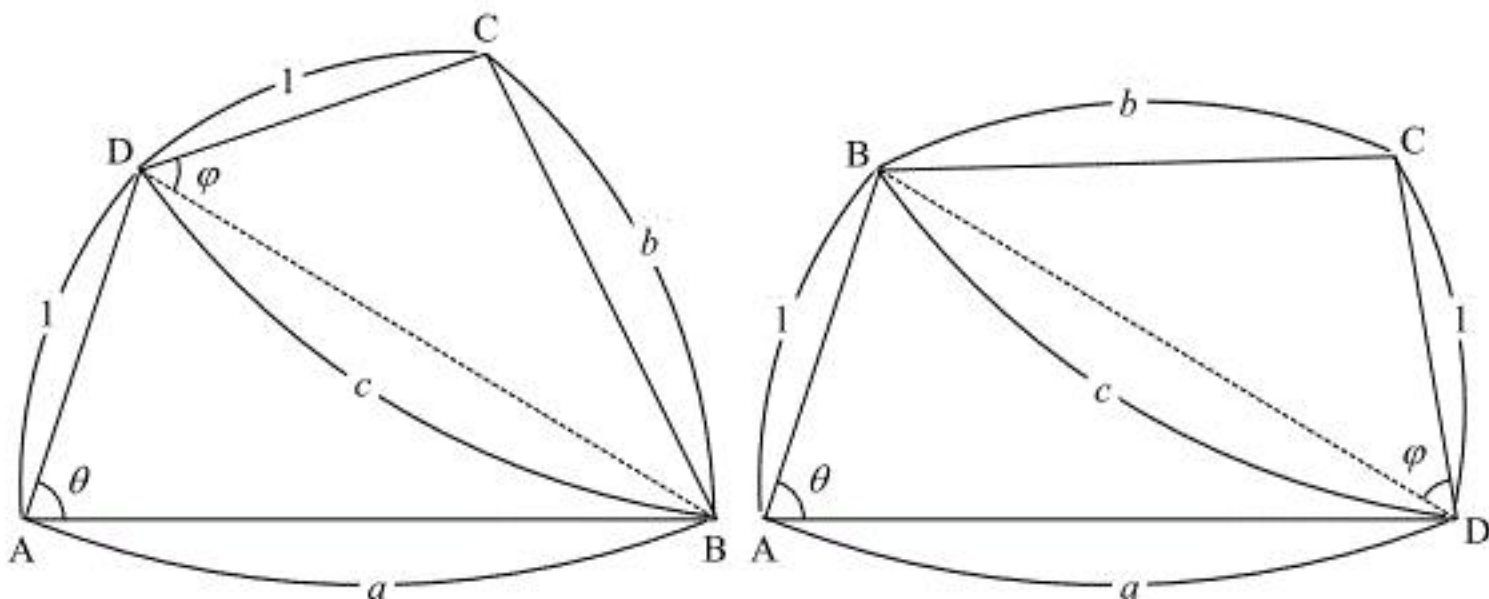
と求まる。

(答) $\sqrt{a^2 + 1}$

(2)



まず、上図のように凸でない四角形については、線分ACに関して点Dと対称な点D'をとると、四角形ABCDの面積よりも四角形ABCD'の面積の方が大きくなるから、以下、凸である四角形についてのみ考えればよいことがわかる。



凸である四角形で2辺の長さが1、他の2辺のうち1辺の長さが a であるものは、上図のように2つの場合があるが、点Bと点Dをおきかえることにより、その面積 S は同様に計算できる。上図のように、他の2辺のうち1辺の長さが a でないものの長さを b 、対角線BDの長さを c 、 $\angle BAD$ 、 $\angle BCD$ の大きさをそれぞれ θ 、 φ とおくと、 $\triangle BAD$ 、 $\triangle BCD$ の面積 S_1 、 S_2 はそれぞれ

$$S_1 = \frac{1}{2}a\sin\theta, \quad S_2 = \frac{1}{2}c\sin\varphi$$

と表せる。ここで、 θ ($0 < \theta < \pi$) の値を固定すると、三角形の合同条件より S_1 の値および c の

値も固定されるから、(1)の結果より、 S_2 の値および四角形の面積 S の値は $\varphi = \frac{\pi}{2}$ のとき最大

になることがわかり、このとき

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}a\sin\theta + \frac{1}{2}c \quad \dots\dots ①$$

と表せる。ここで、余弦定理より、 c 、 θ は関係式

$$c^2 = a^2 + 1 - 2a\cos\theta \quad \dots\dots ②$$

を満たしながら動くから、条件②が成立するもとで①が最大となるときに、 b の値を求めれ

ばよいことがわかる。尚、 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ のとき、三平方の定理より

$$b = \sqrt{c^2 + 1} \quad \dots\dots ③$$

である。

①について関数 $f(\theta)$ を $f(\theta) = \frac{1}{2}a\sin\theta + \frac{1}{2}c$ とおき、②が成立するもとで θ を $0 < \theta < \pi$ の範

囲で動かし、 $f(\theta)$ が最大となるときの b の値を求める。②の両辺を θ で微分して変形すると

$$2c \cdot \frac{dc}{d\theta} = 2a\sin\theta \Leftrightarrow \frac{dc}{d\theta} = \frac{a\sin\theta}{c}$$

となるから、導関数 $f'(\theta)$ は

$$f'(\theta) = \frac{1}{2}a\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{dc}{d\theta} = \frac{a(c\cos\theta + \sin\theta)}{2c}$$

となる。以下、 θ の値について場合分けして $f'(\theta)$ の符号について考えることにする。

[1] $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\cos\theta \geq 0, \quad \sin\theta > 0 \text{ であるから, } f'(\theta) \left(= \frac{a(c\cos\theta + \sin\theta)}{2c} \right) > 0 \text{ である。}$$

[2] $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$$\cos\theta < 0 \text{ であるから, } f'(\theta) = \frac{a(c + \tan\theta)}{2c\cos\theta} \text{ と変形できる。ここで, 関数 } g(\theta) \text{ を}$$

$$g(\theta) = c + \tan\theta$$

とおくと、 $g(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$	...	(π)
$g'(\theta)$		+	
$g(\theta)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$a+1(>0)$

よって、中間値の定理より、 $g(\theta) = 0$ を満たす θ の値がただ1つ存在することがわかる。

この値を θ_0 とおくことにする。

以上[1], [2]より、関数 $f(\theta)$ の増減表は以下のようになることがわかる。

θ	(0)	...	θ_0	...	(π)
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

したがって、 $f(\theta)$ は $\theta = \theta_0$ のとき最大となる。このとき、 a 、 b 、 c 、 θ_0 の関係式より

$$c = -\tan\theta_0, \quad b = \sqrt{c^2 + 1} = -\frac{1}{\cos\theta_0} \quad (\because ③, \quad \frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi)$$

$$a^2 - 2a\cos\theta_0 + 1 - c^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + \frac{2a}{b} + 1 - (b^2 - 1) = 0 \quad (\because ②, \quad b = \sqrt{c^2 + 1} = -\frac{1}{\cos\theta_0})$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b^2 - ab - 2) = 0 \quad (\because \text{両辺に } b \text{ かけて整理})$$

$$\therefore b = \frac{a + \sqrt{a^2 + 8}}{2} (> 0)$$

となることがわかる。

(答) $\frac{a + \sqrt{a^2 + 8}}{2}$

- (1)
- 積 $X_1X_2X_3$ が 0 となるとき、 $X_1=0$ または $X_2=0$ または $X_3=0$ である。したがって、求める確率は、
- $$\frac{1}{4n+1}\times 3=\frac{3}{4n+1}$$
- となる。
- (答) $\frac{3}{4n+1}$
- (2)
- 積 $X_1X_2X_3$ が実数となるのは、 $X_1X_2X_3=0$ 、または X_1, X_2, X_3 のうち虚数が偶数個含まれる場合であるため、以下のように場合分けして調べる。
- [1] $X_1X_2X_3=0$ となるとき
- (1)より、このときの確率は $\frac{3}{4n+1}$ となる。
- [2] $X_1X_2X_3\neq 0$ かつ X_1, X_2, X_3 がすべて実数のとき
- X_1, X_2, X_3 を 0 でない実数の書かれた $2n$ 枚のカードから選べばよいから、求める確率は
- $$\begin{aligned}\frac{{}_{2n}\text{P}_3}{{}_{4n+1}\text{P}_3}&=\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{(4n+1)4n(4n-1)}\\&=\frac{(n-1)(2n-1)}{(4n-1)(4n+1)}\end{aligned}$$
- となる。
- [3] $X_1X_2X_3\neq 0$ かつ X_1, X_2, X_3 のうち 1 つが実数、 2 つが虚数のとき
- X_1, X_2, X_3 のうちどれを実数に割り当てるのかで ${}_3\text{C}_1$ 通り、 0 でない実数の書かれた $2n$ 枚のカードから 1 枚選ぶので $2n$ 通り、 0 でない虚数の書かれた $2n$ 枚のカードから 2 枚選ぶので ${}_{2n}\text{P}_2$ 通りあるため、求める確率は
- $$\begin{aligned}\frac{{}_3\text{C}_1\cdot 2n\cdot {}_{2n}\text{P}_2}{{}_{4n+1}\text{P}_3}&=\frac{3\cdot 2n\cdot 2n(2n-1)}{(4n+1)4n(4n-1)}\\&=\frac{3n(2n-1)}{(4n-1)(4n+1)}\end{aligned}$$
- となる。
- 以上、[1][2][3]より、求める確率は
- $$\begin{aligned}\frac{3}{4n+1}+\frac{(n-1)(2n-1)}{(4n-1)(4n+1)}+\frac{3n(2n-1)}{(4n-1)(4n+1)}&=\frac{2(n+1)(4n-1)}{(4n-1)(4n+1)}\\&=\frac{2(n+1)}{4n+1}\end{aligned}$$
- となる。
- (答) $\frac{2(n+1)}{4n+1}$

- (3)
- 和 X_1+X_2 が実数となる場合を以下のように場合分けして調べる。
- [1] X_1, X_2 がともに実数のとき
- 実数が書かれた $2n+1$ 枚のカードの中から X_1, X_2 を選べばよいから、このようになる確率は
- $$\begin{aligned}\frac{{}_{2n+1}\text{P}_2}{{}_{4n+1}\text{P}_2}&=\frac{(2n+1)2n}{(4n+1)4n}\\&=\frac{2n+1}{2(4n+1)}\end{aligned}$$
- となる。
- [2] $X_1=\pm ki, X_2=\mp ki$ (複号同順)となる場合
- k として取り得る値は n 通りあるから、このときの確率は、
- $$\begin{aligned}\frac{1}{{}_{4n+1}\text{P}_2}\cdot n\cdot 2&=\frac{2n}{(4n+1)4n}\\&=\frac{1}{2(4n+1)}\end{aligned}$$
- となる。
- 以上、[1][2]より、求める確率は
- $$\frac{2n+1}{2(4n+1)}+\frac{1}{2(4n+1)}=\frac{n+1}{4n+1}$$
- となる。
- (答) $\frac{n+1}{4n+1}$

- (4)
- $X_1(X_2+X_3)=0$ となる確率を以下のように場合分けして調べる。
- [1] $X_1=0$ のとき
- このとき、 X_2, X_3 の値に関わらず $X_1(X_2+X_3)=0$ となるため、確率は
- $$\frac{1}{4n+1}$$
- となる。
- [2] $X_1\neq 0$ のとき
- このとき、 $X_2+X_3=0$ であり、このようになる X_2, X_3 の選び方は
- $$X_2=\pm k, X_3=\mp k \quad (\text{複号同順})$$
- または
- $$X_2=\pm ki, X_3=\mp ki \quad (\text{複号同順})$$
- の $4n$ 通りである。それぞれに対して、 0 と選んだ 2 枚を除いた $4n-2$ 枚の中から X_1 に割り当てる数を決めればよいから、確率は
- $$\begin{aligned}\frac{1}{{}_{4n+1}\text{P}_2}\cdot 4n\cdot \frac{4n-2}{4n-1}&=\frac{4n(4n-2)}{(4n+1)4n(4n-1)}\\&=\frac{4n-2}{(4n-1)(4n+1)}\end{aligned}$$
- となる。
- 以上、[1][2]より、求める確率は
- $$\frac{1}{4n+1}+\frac{4n-2}{(4n-1)(4n+1)}=\frac{8n-3}{(4n-1)(4n+1)}$$
- となる。
- (答) $\frac{8n-3}{(4n-1)(4n+1)}$

- (5)
- $X_1(X_2+X_3)$ が実数となる確率を以下のように場合分けして調べる。
- [1] $X_1=0$ のとき
- このとき、 X_2, X_3 の値に関わらず $X_1(X_2+X_3)=0$ となって実数となるため、確率は
- $$\frac{1}{4n+1}$$
- となる。
- [2] $X_1\neq 0$ かつ X_1 が実数のとき
- このとき、 X_2, X_3 がともに実数であるか、 X_2, X_3 がともに虚数かつ $X_2+X_3=0$ 、すなわち
- $$X_2=\pm ki, X_3=\mp ki \quad (\text{複号同順})$$
- である。前者については、 X_2, X_3 を X_1 を除いた 0 を含む実数の中から選べばよいから、
- $$\begin{aligned}\frac{2n}{4n+1}\cdot \frac{{}_{2n}\text{P}_2}{{}_{4n}\text{P}_2}&=\frac{2n\cdot 2n(2n-1)}{(4n+1)4n(4n-1)}\\&=\frac{n(2n-1)}{(4n-1)(4n+1)}\end{aligned}$$
- となる。後者については、
- $$\begin{aligned}\frac{2n}{4n+1}\cdot \frac{1}{{}_{4n}\text{P}_2}\cdot 2n&=\frac{2n\cdot 2n}{(4n+1)4n(4n-1)}\\&=\frac{n}{(4n-1)(4n+1)}\end{aligned}$$
- となる。したがって、
- $$\frac{n(2n-1)}{(4n-1)(4n+1)}+\frac{n}{(4n-1)(4n+1)}=\frac{2n^2}{(4n-1)(4n+1)}$$
- となる。
- [3] $X_1\neq 0$ かつ X_1 が虚数のとき
- このとき、 X_2, X_3 がともに 0 または虚数であるか、 X_2, X_3 がともに実数かつ $X_2+X_3=0$ 、すなわち
- $$X_2=\pm k, X_3=\mp k \quad (\text{複号同順})$$
- である。前者については、 X_2, X_3 を X_1 を除いた虚数または 0 のの中から選べばよいから、
- $$\begin{aligned}\frac{2n}{4n+1}\cdot \frac{{}_{2n}\text{P}_2}{{}_{4n}\text{P}_2}&=\frac{2n\cdot 2n(2n-1)}{(4n+1)4n(4n-1)}\\&=\frac{n(2n-1)}{(4n-1)(4n+1)}\end{aligned}$$
- となる。後者については、
- $$\begin{aligned}\frac{2n}{4n+1}\cdot \frac{1}{{}_{4n}\text{P}_2}\cdot 2n&=\frac{2n\cdot 2n}{(4n+1)4n(4n-1)}\\&=\frac{n}{(4n-1)(4n+1)}\end{aligned}$$
- となる。したがって、
- $$\frac{n(2n-1)}{(4n-1)(4n+1)}+\frac{n}{(4n-1)(4n+1)}=\frac{2n^2}{(4n-1)(4n+1)}$$
- となる。
- 以上、[1][2][3]より、求める確率は
- $$\frac{1}{4n+1}+\frac{2n^2}{(4n-1)(4n+1)}+\frac{2n^2}{(4n-1)(4n+1)}=\frac{4n^2+4n-1}{(4n-1)(4n+1)}$$
- となる。
- (答) $\frac{4n^2+4n-1}{(4n-1)(4n+1)}$