

平成 27 年度 数 学

問題の選択方法

- 教育学部, 農学部, 工学部環境建設工学科社会デザインコースの受験者は,
□1 □2 □3 □4 の 4 問
- 理学部, 工学部(環境建設工学科社会デザインコースを除く)の受験者は,
□4 □5 □6 □7 □8 の 5 問
- 医学部の受験者は,
□6 □7 □8 □9 □10 の 5 問

を解答すること。

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで, この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は, 19 ページあります。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は, 手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答は, すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。やむをえない場合は, 解答用紙の裏も使用してよい。ただし, 裏を使用する場合は, その旨を解答用紙の表に明記し, 裏に書かれた指示に従って解答すること。
- 4 問題冊子の余白は下書きに使用してよい。

次の問いに答えよ。

- (1) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ からその整数部分を引いた値を a とするとき、 $a^2 + 4a + 5$ の値を求めよ。

- (2) 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1 \\ x \log_2 x - y \log_2 y = 0 \end{cases}$$

- (3) s, t を実数とする。座標空間内の同一平面上にある4点 $O(0, 0, 0)$, $A(4, s, t)$, $B(2, 3, 2)$, $C(0, 5, 1)$ が $\angle AOB = 90^\circ$ をみたすとき、 s, t の値を求めよ。

- (4) 初項が3、公比が4である等比数列の第 k 項を a_k とする。このとき、 $\sum_{k=n}^{n^2} a_k$ を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

2

(教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース)

原点を O とする座標平面上に 3 点 $A(0, 3)$, $B(4, 0)$, $C(4, 4)$ を頂点とする三角形 ABC があり, 線分 AB 上に点 P がある。ただし, P は線分 AB の端点にないものとする。直線 OP によって三角形 ABC を 2 つの図形に分けたとき, 点 A を含む図形の面積を S とする。線分 AP の長さを t とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) t の値の範囲を求め, 点 P の座標を t を用いて表せ。
- (2) 直線 OP が線分 AC と共有点をもつような t の値の範囲を求め, その共有点の座標を t を用いて表せ。
- (3) S を t を用いて表せ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

a を自然数とし、関数 $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + 4$ は $x = x_1$ で極大、 $x = x_2$ で極小になるものとする。また、曲線 $y = f(x)$ 上の2点 $P(x_1, f(x_1))$, $Q(x_2, f(x_2))$ の中点を R とする。

- (1) $a = 1$ であることを示せ。
- (2) 点 P および点 Q の座標を求めよ。
- (3) 点 R は曲線 $y = f(x)$ 上にあることを示せ。
- (4) 点 R における曲線 $y = f(x)$ の接線は、点 R 以外に $y = f(x)$ との共有点をもたないことを示せ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

n を自然数, i を虚数単位とする。集合 I_1, I_2, I_3, I_4 , および A を

$$I_1 = \{k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$I_2 = \{-k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$I_3 = \{ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$I_4 = \{-ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$A = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup \{0\}$$

とする。集合 A の要素が 1 つずつ書かれたカードが $4n + 1$ 枚ある。ただし、それぞれのカードに書かれている要素は異なるものとする。これらのカードをよくまぜて、左から右に一列に並べる。左から k 番目のカードに書かれた数を X_k とするとき、次の確率を求めよ。

- (1) 積 $X_1 X_2 X_3$ が 0 となる。
- (2) 積 $X_1 X_2 X_3$ が実数となる。
- (3) 和 $X_1 + X_2$ が実数となる。
- (4) $X_1(X_2 + X_3)$ が 0 となる。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

5

(理学部・工学部(環境建設工学科社会デザインコースを除く))

次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int x^3 e^{x^2} dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| dx$ を求めよ。

(3) 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $(\sqrt{2}, 1)$ における接線の方程式を求めよ。

(4) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ からその整数部分を引いた値を a とするとき、
 $a^4 + 5a^3 + 4a^2 + 4a$ の値を求めよ。

(5) 実数 a, b, c は $0 < a < b < c$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$ をみたすとする。
このとき、 $|b-a| < |b-c|$ が成り立つことを示せ。

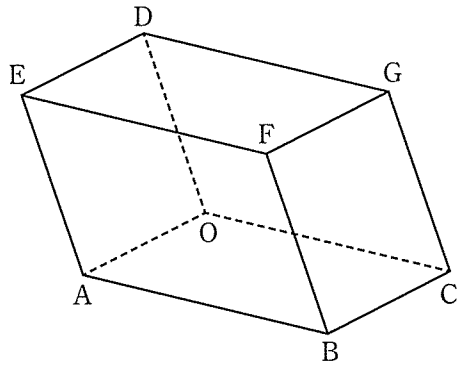
(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

6

(理学部・工学部(環境建設工学科社会デザインコースを除く)・医学部)

t を実数とする。座標空間内に4点 $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $C(-1, 6, -2)$, $D(t, -2, 4)$ がある。図のような平行六面体 $OABC-DEFG$ において、点 P が平行四辺形 $DEFG$ の周および内部を動くとき、 $\triangle OCP$ の面積 S の最小値を m とする。また、平行四辺形 $DEFG$ を含む平面を α とし、点 O から平面 α に下ろした垂線と平面 α との交点を Q とする。



- (1) 平行四辺形 $OABC$ を含む平面に垂直な単位ベクトル $\vec{u}$ で、その z 成分が正となるものを求めよ。
- (2) 線分 OQ の長さを求めよ。
- (3) 点 Q が平行四辺形 $DEFG$ の周または内部にあるとき、 t のとり得る値の範囲を求めよ。
- (4) t が(3)で求めた範囲にあるとき、 m の値および $S = m$ となる点 P の座標をすべて求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

a を実数とし, 数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 2a_n & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

$$b_1 = a, \quad b_{n+1} = \begin{cases} 2b_n & (n \text{ が奇数のとき}) \\ b_n + 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

で定める。

(1) a_2, a_3, a_4 , および b_2, b_3, b_4 を求めよ。

(2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{2n}$ で定める。 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{S_n\}$, $\{T_n\}$, および $\{U_n\}$ をそれぞれ

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{2n} b_k, \quad U_n = S_n - T_n$$

で定める。

(i) $\{S_n\}$ の一般項を求めよ。

(ii) $a = 1$ のとき, $\{U_n\}$ の一般項を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

n を自然数とし、曲線 $y = n \sin \frac{x}{n}$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の第 1 象限における交点の座標を (p_n, q_n) とする。

(1) $x > 0$ のとき、不等式 $n \sin \frac{x}{n} < x$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $p_n > \frac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ。

(3) $0 \leq x \leq 1$ のとき、不等式

$$(\star) \quad \left(n \sin \frac{1}{n}\right)x \leq n \sin \frac{x}{n}$$

が成り立つことを利用して、次の(i), (ii)に答えよ。

(i) 不等式 $p_n \leq \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2 \frac{1}{n}}}$ が成り立つことを示せ。

(ii) x 軸、直線 $x = p_n$ 、および曲線 $y = n \sin \frac{x}{n}$ ($0 \leq x \leq p_n$) で囲まれた領域の面積を S_n とするとき、 S_n を p_n を用いて表せ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

(4) $0 \leq x \leq 1$ のとき、(3)の不等式(☆)が成り立つことを示せ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

9

(医学部)

a を正の実数とすると、次の問いに答えよ。

- (1) 1 辺の長さが 1, 他の 2 辺のうち 1 辺の長さが a である三角形のなかで,
面積が最大である三角形の残りの 1 辺の長さを a を用いて表せ。
- (2) 2 辺の長さが 1, 他の 2 辺のうち 1 辺の長さが a である四角形のなかで,
面積が最大である四角形の残りの 1 辺の長さを a を用いて表せ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

10 (医学部)

n を自然数, i を虚数単位とする。集合 I_1, I_2, I_3, I_4 , および A を

$$I_1 = \{k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$I_2 = \{-k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$I_3 = \{ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$I_4 = \{-ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$A = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup \{0\}$$

とする。集合 A の要素が 1 つずつ書かれたカードが $4n + 1$ 枚ある。ただし, それぞれのカードに書かれている要素は異なるものとする。これらのカードをよくまぜて, 左から右に一列に並べる。左から k 番目のカードに書かれた数を X_k とするとき, 次の確率を求めよ。

- (1) 積 $X_1 X_2 X_3$ が 0 となる。
- (2) 積 $X_1 X_2 X_3$ が実数となる。
- (3) 和 $X_1 + X_2$ が実数となる。
- (4) $X_1(X_2 + X_3)$ が 0 となる。
- (5) $X_1(X_2 + X_3)$ が実数となる。

