

(1)

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ であるから、1以外の30の正の約数は、

$$2, 3, 5, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5$$

すなわち

$$2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$$

である。 k の倍数となる1以上1000以下の自然数の個数を $n(k)$ とすると、 $n(k) = \left\lfloor \frac{1000}{k} \right\rfloor$ であ

る。ここで、 $\lfloor x \rfloor$ は実数 x を超えない最大の整数を表す。以上より、1000以下の自然数で、30

と互いに素でない自然数の個数は、

$$\begin{aligned} & n(2) + n(3) + n(5) - n(6) - n(10) - n(15) + n(30) \\ &= \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor \\ &= 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 \\ &= 734 \end{aligned}$$

である。よって、集合 $A \cap B$ の要素の個数は、1以上1000以下の自然数で、30と互いに素であるものの個数であるから、 $1000 - 734 = 266$ （個）と求められる。

(答) 266個

(2)

$$\begin{aligned} \frac{4^x \times 6^{x+y} \times 12^{x-y}}{16^x \times 9^{2x+3y}} &= \frac{2^{2x} \times (2 \times 3)^{x+y} \times (2^2 \times 3)^{x-y}}{2^{4x} \times 3^{2(2x+3y)}} \\ &= 2^{2x+x+y+2(x-y)-4x} \times 3^{x+y+x-y-(4x-6y)} \\ &= 2^{x-y} \times 3^{-2x+6y} \end{aligned}$$

となり、 $x-y, -2x+6y, a, b$ は全て整数であるから、与えられた式の右辺と比較することで、

$$a = x - y, b = -2x + 6y$$

が得られる。

(答) $a = x - y, b = -2x + 6y$

(3)

$$275x + 61y = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$275 \cdot 2 + 61 \cdot (-9) = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①-②より、

$$275(x-2) = -61(y+9) \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。275と61は互いに素であるから、③式より $x-2$ は61の倍数である。これより、整数 n を用いて $x-2=61n$ とおくことができる。これを③式に代入すると、 $y+9=-275n$ となる。

よって求める解は、

$$x = 61n + 2, y = -275n - 9 \quad (n \text{ は整数})$$

となる。

(答) $x = 61n + 2, y = -275n - 9 \quad (n \text{ は整数})$

(4)

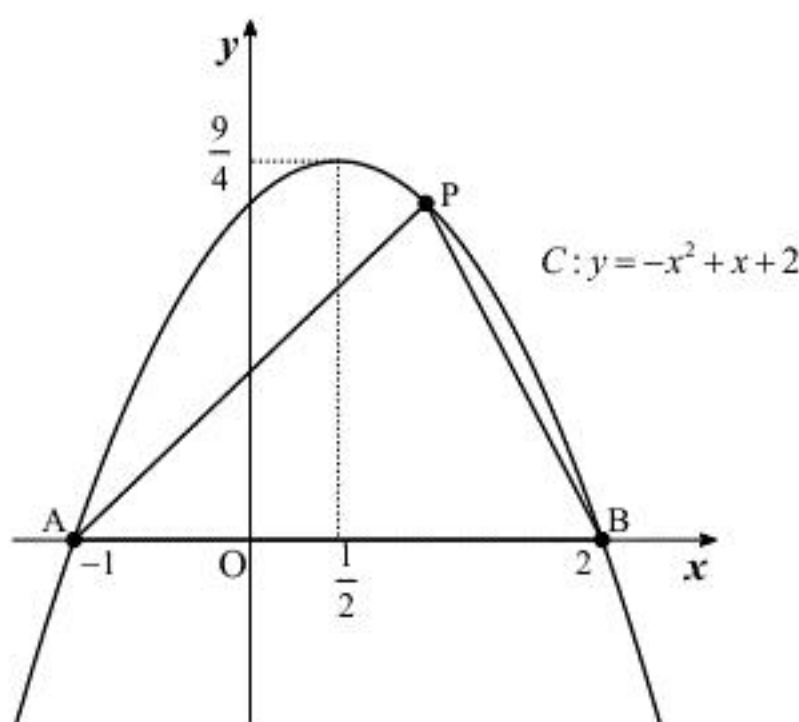
三角関数の加法定理より、

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

(1)



放物線 C と x 軸との交点の x 座標は、 $-x^2 + x + 2 = -(x+1)(x-2) = 0$ を解いて $x = -1, 2$ である

から、 A, B の座標はそれぞれ $(-1, 0), (2, 0)$ である。 $\triangle PAB$ の面積が最大となるのは、上のグラフより、点 P の y 座標が最大となる場合であり、すなわち点 P が $y = -x^2 + x + 2$ のグラフの頂点と一致する場合である。したがって、 $y = -x^2 + x + 2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ より、 $\triangle PAB$ の面積が最大となるとき、点 P の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ であり、このときの面積は、 $\frac{1}{2} \cdot \{2 - (-1)\} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$ である。

(答) 点 P の座標： $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ ， $\triangle PAB$ の面積： $\frac{27}{8}$

(2)

面積 S は、

$$S = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = -\int_{-1}^2 (x-2)(x+1) dx = \frac{1}{6} \{2 - (-1)\}^3 = \frac{9}{2}$$

である。ここで、点 P の座標を $(t, -t^2 + t + 2)$ とおく。ただし、 $-1 < t < 2$ である。このとき

$\triangle PAB$ の面積 S_1 は、 $S_1 = \frac{1}{2} \cdot \{2 - (-1)\} \cdot (-t^2 + t + 2) = \frac{3}{2}(-t^2 + t + 2)$ である。したがって、 $S_1 = \frac{S}{3}$

であるとき、

$$\frac{3}{2}(-t^2 + t + 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow -t^2 + t + 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となる。 $-1 < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < 2$ であるから、求める点 P の座標は、 $\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, 1\right)$ である。

(答) $\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, 1\right)$

(3)

$P(t, -t^2 + t + 2) (-1 < t < 2)$ と直線 $2x + y - 5 = 0$ との距離 d は、

$$d = \frac{|2t - t^2 + t + 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{|-t^2 + 3t - 3|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} |t^2 - 3t + 3|$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \left\{ \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} \quad \left(t^2 - 3t + 3 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0 \right)$$

となるから、 $-1 < \frac{3}{2} < 2$ より、 $t = \frac{3}{2}$ のとき、 d は最小値 $\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{20}$ をとる。このとき、

$-\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{4}$ であるから、 P の座標は、 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ である。

(答) 点 P の座標： $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ ，距離の最小値： $\frac{3\sqrt{5}}{20}$

(1)

$\triangle ABC$ が正三角形となる必要十分条件は、3点 $A(1+2i)$, $B(3+4i)$, $C(z)$ に対して、

$$z-(1+2i)=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\{(3+4i)-(1+2i)\} \quad (\text{複号同順}) \cdots \textcircled{1}$$

が成立することである。よって正三角形となるときの z は、 $\textcircled{1}$ 式を展開して、

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \cdot (2+2i) + 1+2i \\ &= 1 \mp \sqrt{3} + (1 \pm \sqrt{3})i + 1+2i \\ &= 2 \mp \sqrt{3} + (3 \pm \sqrt{3})i \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2 \mp \sqrt{3} + (3 \pm \sqrt{3})i \quad (\text{複号同順})$$

(2)

(i)

$f(x) = 2x + \sqrt{3} + 4\sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$ について、 $0 < x < \pi$ において

$$f'(x) = 2 + 4\cos x$$

$$f''(x) = -4\sin x$$

となる。 $f'(x) = 0$ となるのは、 $2 + 4\cos x = 0$ 、すなわち $\cos x = -\frac{1}{2}$ のときである。ゆえに、

$0 < x < \pi$ より、 $x = \frac{2}{3}\pi$ のとき $f'(x) = 0$ となる。したがって、 $y = f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$f'(x)$	↗	+	0	-	↘
$f''(x)$	↗	-	-	-	↗
$f(x)$	$\sqrt{3}$	↗	$\frac{4}{3}\pi + 3\sqrt{3}$	↘	$2\pi + \sqrt{3}$

また、 $g(x) = x + \sqrt{3} - 2\sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$ について、 $0 < x < \pi$ において

$$g'(x) = 1 - 2\cos x$$

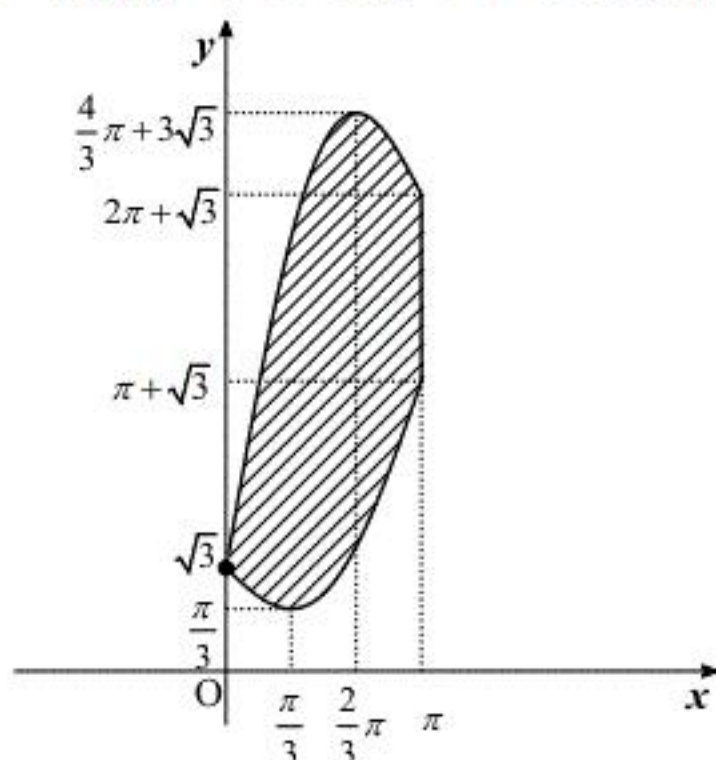
$$g''(x) = 2\sin x$$

となる。 $g'(x) = 0$ となるのは、 $1 - 2\cos x = 0$ のとき、すなわち $\cos x = \frac{1}{2}$ のときである。ゆえに、

$0 < x < \pi$ より、 $x = \frac{\pi}{3}$ のとき $g'(x) = 0$ となる。したがって $y = g(x)$ の増減表は下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π
$g'(x)$	↗	-	0	+	↗
$g''(x)$	↗	+	+	+	↗
$g(x)$	$\sqrt{3}$	↘	$\frac{\pi}{3}$	↗	$\pi + \sqrt{3}$

以上より、 D は下の図の斜線部分のようになる。ただし、境界線を含む。



(答) 前図

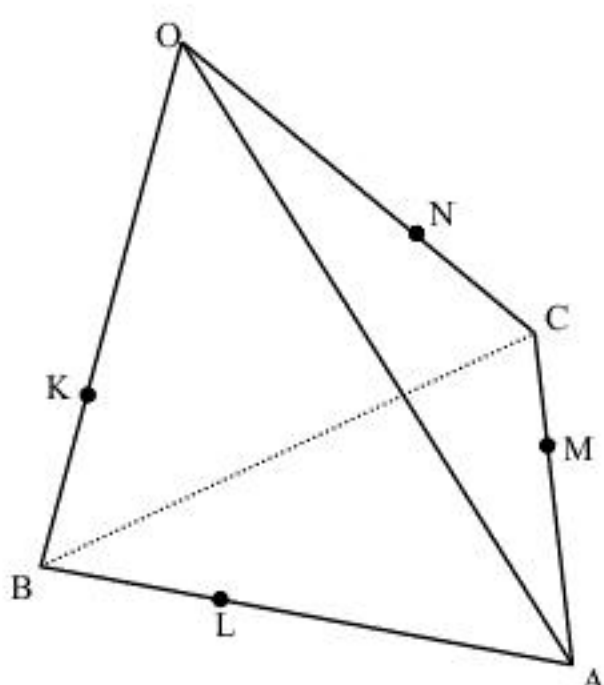
(ii)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^\pi (x + 6\sin x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - 6\cos x \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2}\pi^2 + 12 \end{aligned}$$

より、 $S = \frac{1}{2}\pi^2 + 12$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}\pi^2 + 12$$

(1)



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。点 K, L, M, N がそれぞれ線分 OB, AB, AC, OC を 2:1 に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{2}{3}\vec{c}$$

となる。これらより、

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OK} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

である。よって、 $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$ である。

(証明終)

(2)

(i)

$\vec{a} = (4, 6, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$, $\vec{c} = (p, 3, q)$ である。これを用いると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OK} \\ &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{b} \\ &= \frac{1}{3}(4, 6, 0) + \frac{2}{3}(p, 3, q) - \frac{2}{3}(1, 1, 0) \\ &= \left(\frac{2}{3}p + \frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}q\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OL} \\ &= \frac{2}{3}\vec{c} - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \\ &= \frac{2}{3}(p, 3, q) - \frac{1}{3}(4, 6, 0) - \frac{2}{3}(1, 1, 0) \\ &= \left(\frac{2}{3}p - 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}q\right)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{KM} = \left(\frac{2}{3}p + \frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}q\right), \overrightarrow{LN} = \left(\frac{2}{3}p - 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}q\right)$$

(ii)

(1)より、 $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$ であるから、四角形 KLMN は平行四辺形である。ゆえに、平行四辺形 KLMN がひし形となる必要十分条件は、対角線が直交することである。したがって、(2)(i)の結果より、 $\overrightarrow{KM} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{LN} \neq \vec{0}$ であることを踏まえて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{LN} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}p + \frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}q\right) \cdot \left(\frac{2}{3}p - 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}q\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 (p+1)(p-3) - \frac{10}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}q\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 + q^2 - 2p - 8 &= 0\end{aligned}$$

が導かれる。

$$(\text{答}) \quad p^2 + q^2 - 2p - 8 = 0$$

(iii)

四角形 KLMN が正方形になる必要十分条件は、(2)(ii)で導いた条件

$$p^2 + q^2 - 2p - 8 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たし、かつ対角線の長さが等しいこと、すなわち

$$|\overrightarrow{KM}| = |\overrightarrow{LN}| \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。ここで、 $|\overrightarrow{KM}| > 0$, $|\overrightarrow{LN}| > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\textcircled{2} &\Leftrightarrow |\overrightarrow{KM}|^2 = |\overrightarrow{LN}|^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{9}(p+1)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}q\right)^2 = \frac{4}{9}(p-3)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}q\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{9}p + \frac{104}{9} = -\frac{8}{9}p + \frac{40}{9} \\ &\Leftrightarrow \frac{32}{9}p = -\frac{64}{9} \\ &\Leftrightarrow p = -2\end{aligned}$$

となる。これより、 $\textcircled{1}$ に $p = -2$ を代入すると、

$$q^2 = -p^2 + 2p + 8 = -(-2)^2 + 2(-2) + 8 = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

が導かれる。よって、四角形 KLMN が正方形となるのは、

$$(p, q) = (-2, 0)$$

のときである。

$$(\text{答}) \quad (p, q) = (-2, 0)$$

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
(1)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

(2)

(1)の結果より、 $n \geq 1$ において

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{3}c_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{3}b_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。したがって、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より、

$$b_{n+1} - c_{n+1} = -\frac{2}{3}(b_n - c_n)$$

となる。これより、 $b_1 = 0, c_1 = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} b_n - c_n &= \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} (b_1 - c_1) \\ &= -\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad -\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

(3)

各事象の起こる確率の総和は1であるから、

$$a_n + b_n + c_n = 1 \Leftrightarrow b_n + c_n = 1 - a_n$$

が成立する。これと(1)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{3}(b_n + c_n) \\ &= \frac{1}{3}(1 - a_n) \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(a_n - \frac{1}{4}\right)$$

が導かれる。これより、 $n \geq 2$ について、 $a_1 = 0$ であることを用いて、

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{4} &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(a_1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \therefore a_n &= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。また、 $n=1$ のとき、 $a_1 = 0$ であり、これは④式に $n=1$ を代入したものに等しい。したがって、④式は $n=1$ のときにも成立する。よって、 $n \geq 1$ において、

$$a_n = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$

(4)

(3)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} b_n + c_n &= 1 - a_n \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{4} \quad \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となる。よって、 $(\textcircled{3} + \textcircled{5}) \div 2$ より、

$$b_n = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{8}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{8}$$

【解説】

(1)

a_2, b_2 は、それぞれ第1試合でA、Bが負ける確率である。したがって、AとBが対戦したとき

Aが勝利する確率が $\frac{2}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ b_2 &= \frac{2}{3} \\ c_2 &= 1 - a_2 - b_2 = 0 \end{aligned}$$

である。また、第3試合でCが待機するのは、

- [1] 第1試合でAが勝ち、第2試合でAにCが負ける場合
- [2] 第1試合でBが勝ち、第2試合でBにCが負ける場合

の2つの場合であり、確率はそれぞれ $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ である。したがって、

$$c_3 = \frac{4}{9} + \frac{1}{6} = \frac{11}{18}$$

である。ここで、第 $(n+1)$ 試合においてAが待機する場合を考えると、以下の2つの場合である。

- [3] 第 n 試合でCと対戦し、負ける場合

$$\text{確率は、} b_n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}b_n \text{ である。}$$

- [4] 第 n 試合でBと対戦し、負ける場合

$$\text{確率は、} c_n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}c_n \text{ である。}$$

したがって、確率 a_{n+1} は、

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n$$

である。これと同様にして、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{aligned}$$

が導かれる。

(1)

$t = -x$ とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき, $t \rightarrow \infty$ である。これより,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x} - x}{x+1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4t^2 - t} + t}{-t+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{1}{t}} + 1}{-1 + \frac{1}{t}} \\ &= \frac{2+1}{-1} \\ &= -3\end{aligned}$$

となる。

(答) -3

(2)

$f(x) = \frac{\log 2}{\log x}$ ($x > 1$ より, $\log x > 0$) であるから,

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{\log 2 \cdot (\log x)'}{(\log x)^2} \\ &= -\frac{\log 2}{x(\log x)^2}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad -\frac{\log 2}{x(\log x)^2}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \log x} &= \int_e^{e^2} \frac{(\log x)'}{\log x} dx \\ &= [\log |\log x|]_e^{e^2} \\ &= \log 2\end{aligned}$$

となる。したがって, $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \log x} = \log 2$ である。

(答) $\log 2$

(4)

$$a_n = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{\frac{1}{n}}$$

より,

$$\begin{aligned}\log a_n &= \frac{1}{n} \log \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \log \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \log \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

となる。よって, 求める極限値は, 区分求積法を適用すると,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 \log(1+x) dx \\ &= \left[(1+x) \log(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} dx \\ &= 2 \log 2 - 1\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $2 \log 2 - 1$

(1)

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

であるから、絶対値 $|\alpha|$ 、偏角 $\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$ はそれぞれ、

$$|\alpha| = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

となる。

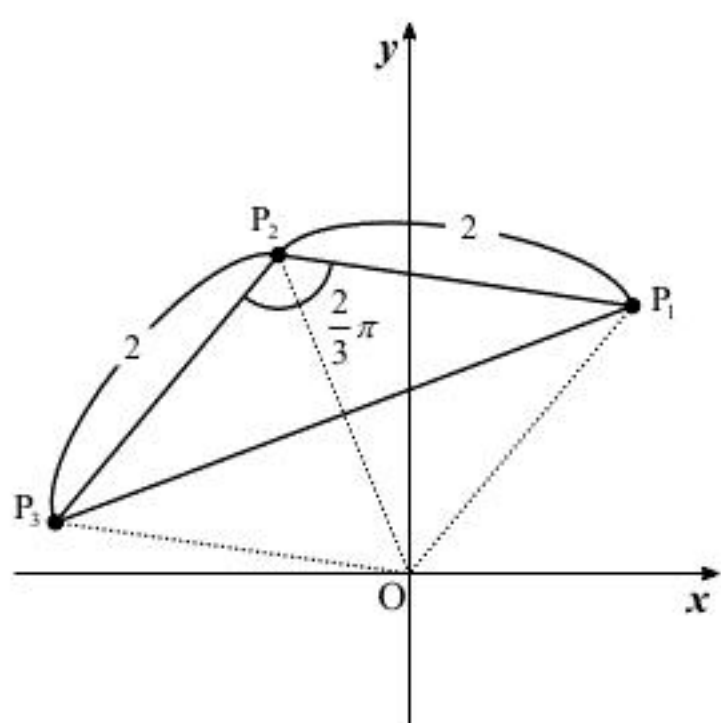
$$(\text{答}) \quad |\alpha| = 1, \theta = \frac{\pi}{3}$$

(2)

$\alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ であるから、3点 $P_1(\beta), P_2(\alpha\beta), P_3(\alpha^2\beta)$ について、 P_2 は P_1 を原点まわりに

$\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点、 P_3 は P_2 を原点まわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点である。したがって、下の

図において、 $\angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \frac{\pi}{3}$ である。



ここで、 $|\beta| = 2$ であるから、 $OP_1 = OP_2 = OP_3 = 2$ である。これらより、 $\triangle OP_1P_2$ 、 $\triangle OP_2P_3$ は一辺

2の正三角形である。したがって、 $P_1P_2 = P_2P_3 = 2$ 、 $\angle P_1P_2P_3 = \frac{2}{3}\pi$ となる。よって、 $\triangle P_1P_2P_3$ の

面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{2}{3}\pi = \sqrt{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{3}$$

(3)

(i)

$\overline{Q_1Q_2}, \overline{Q_1Q_3}$ はそれぞれ $\gamma^2 - \gamma, \gamma^3 - \gamma$ で表すことができ、 $\gamma \neq 0, 1$ であるから、

$$\frac{\gamma^3 - \gamma}{\gamma^2 - \gamma} = \frac{\gamma(\gamma + 1)(\gamma - 1)}{\gamma(\gamma - 1)} = \gamma + 1 = 4\alpha = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。これより、

$$\angle Q_2Q_1Q_3 = \left| \arg \left(\frac{\gamma^3 - \gamma}{\gamma^2 - \gamma} \right) \right| = \frac{\pi}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{3}$$

(ii)

$$\gamma = -1 + 4\alpha = -1 + 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + 2\sqrt{3}i$$

$$\gamma^2 = (1 + 2\sqrt{3}i)^2 = -11 + 4\sqrt{3}i$$

であるから、 Q_1Q_2 の長さは、

$$\begin{aligned} Q_1Q_2 &= |\gamma^2 - \gamma| \\ &= |-12 + 2\sqrt{3}i| \\ &= \sqrt{(-12)^2 + (2\sqrt{3})^2} \\ &= 2\sqrt{39} \end{aligned}$$

である。これと①式から、

$$Q_1Q_3 = 4Q_1Q_2 = 8\sqrt{39}$$

$$\angle Q_2Q_1Q_3 = \frac{\pi}{3}$$

となる。よって、 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{39} \cdot 8\sqrt{39} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 156\sqrt{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 156\sqrt{3}$$

(1)

$f(x) = x + a + 2\sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について、 $0 < x < \pi$ において

$$f'(x) = 1 + 2\cos x$$

$$f''(x) = -2\sin x < 0 \quad (\because 0 < x < \pi \text{ のとき } \sin x > 0)$$

となる。 $f'(x) = 0$ となるのは、 $1 + 2\cos x = 0$ 、すなわち $\cos x = -\frac{1}{2}$ のときである。ゆえに、

$0 < x < \pi$ より、 $x = \frac{2}{3}\pi$ のとき $f'(x) = 0$ となる。したがって、 $y = f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f''(x)$		-	-	-	
$f(x)$	a	$\nearrow$	$\frac{2}{3}\pi + a + \sqrt{3}$	$\searrow$	$\pi + a$

また、 $g(x) = x + a - 2\sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について、 $0 < x < \pi$ において

$$g'(x) = 1 - 2\cos x$$

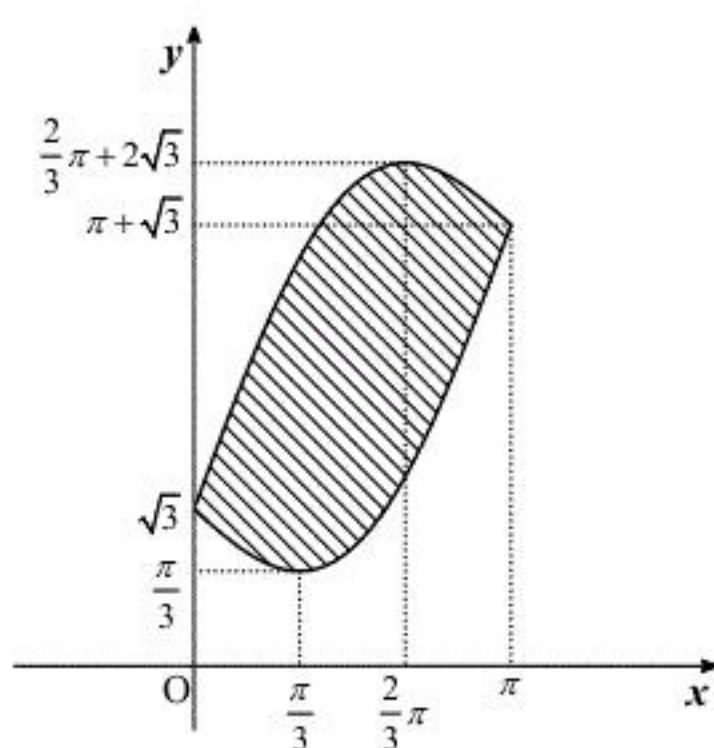
$$g''(x) = 2\sin x > 0 \quad (\because 0 < x < \pi \text{ のとき } \sin x > 0)$$

となる。 $g'(x) = 0$ となるのは、 $1 - 2\cos x = 0$ のとき、すなわち $\cos x = \frac{1}{2}$ のときである。ゆえに、

$0 < x < \pi$ より、 $x = \frac{\pi}{3}$ のとき $g'(x) = 0$ となる。したがって $y = g(x)$ の増減表は下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π
$g'(x)$		-	0	+	
$g''(x)$		+	+	+	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{3} + a - \sqrt{3}$	$\nearrow$	$\pi + a$

よって、これらの増減表より、 $a = \sqrt{3}$ のとき D は次の図の斜線部分のようになる。ただし、境界線を含む。



(答) 前図

(2)

曲線 $y = g(x)$ が x 軸に接するのは、(1) の増減表より、 $x = \frac{\pi}{3}$ における極小値が 0 となるときである。すなわち、

$$\frac{\pi}{3} + a - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

が成立する場合である。また、このとき、 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は、

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^\pi \pi \left\{ (f(x))^2 - (g(x))^2 \right\} dx \\
 &= \pi \int_0^\pi \left\{ (x + a + 2\sin x)^2 - (x + a - 2\sin x)^2 \right\} dx \\
 &= 8\pi \int_0^\pi (x + a) \sin x \, dx \\
 &= 8\pi \int_0^\pi -(x + a)(\cos x)' \, dx \\
 &= -8\pi \left[(x + a) \cos x \right]_0^\pi + 8\pi \int_a^\pi \cos x \, dx \\
 &= 8\pi (\pi + 2a) \\
 &= 8\pi \left\{ \pi + 2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \right\} \\
 &= \frac{8}{3} \pi^2 + 16\sqrt{3}\pi
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8}{3}\pi^2 + 16\sqrt{3}\pi$

(1)

$$f(x) = \frac{\log x}{x^x} \text{ より,}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^x - \log x \cdot (x^x)'}{(x^x)^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ただし、 $(x^x)' = \frac{d}{dx}(x^x)$ である。ここで、 $y = x^x$ とおく。 $x > 0$ より、両辺の対数をとると、 $\log y = x \log x$ となる。これを x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1 \\ \therefore y' &= y(\log x + 1) = x^x (\log x + 1) \end{aligned}$$

が導かれる。したがって、 $(x^x)' = x^x (\log x + 1)$ である。よって、これを①式に代入すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^x \left\{ \frac{1}{x} - \log x (\log x + 1) \right\}}{(x^x)^2} \\ &= \frac{1 - x \log x - x (\log x)^2}{x^{x+1}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{1 - x \log x - x (\log x)^2}{x^{x+1}}$$

(2)

$x \geq \sqrt{3}$ において、 $g(x) = x \log x + x (\log x)^2$ とおくと、 $\log x \geq \log \sqrt{3} > 0$ より、

$$g'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot (\log x)^2 + 2x \log x \cdot \frac{1}{x} = (\log x)^2 + 3 \log x + 1 > 0$$

となる。したがって、 $x \geq \sqrt{3}$ において $g(x)$ は単調増加である。これより、

$$\begin{aligned} g(x) &= x \log x + x (\log x)^2 \\ &\geq \sqrt{3} \log \sqrt{3} + \sqrt{3} (\log \sqrt{3})^2 \\ &> \sqrt{3} \log \sqrt{e} + \sqrt{3} (\log \sqrt{e})^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ &> 1 \end{aligned}$$

$$\therefore 1 - x \log x - x (\log x)^2 < 0$$

が導かれる。したがって、 $x \geq \sqrt{3}$ において、 $x^{x+1} > 0$ であるから、 $f'(x) < 0$ 、すなわち、 $f(x)$

は単調減少である。ゆえに、 $x \geq \sqrt{3}$ において、 $f(x)$ は極値をとらない。よって、 $x = a$ で極値をとるならば $a < \sqrt{3}$ である。

(証明終)

(3)

(2)より、 $x \geq \sqrt{3}$ において $f(x)$ は単調減少であるから、

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &> f(\sqrt{5}) \\ \Leftrightarrow \frac{\log \sqrt{3}}{\sqrt{3}^{\sqrt{3}}} &> \frac{\log \sqrt{5}}{\sqrt{5}^{\sqrt{5}}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{5}^{\sqrt{5}} \log \sqrt{3} &> \sqrt{3}^{\sqrt{3}} \log \sqrt{5} \quad (\sqrt{3}^{\sqrt{3}} > 0, \sqrt{5}^{\sqrt{5}} > 0) \\ \Leftrightarrow \log \sqrt{3}^{(\sqrt{5}^{\sqrt{5}})} &> \log \sqrt{5}^{(\sqrt{3}^{\sqrt{3}})} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}^{(\sqrt{5}^{\sqrt{5}})} &> \sqrt{5}^{(\sqrt{3}^{\sqrt{3}})} \quad (\log x \text{ は単調増加関数}) \end{aligned}$$

が導かれる。よって、 $\sqrt{3}^{(\sqrt{5}^{\sqrt{5}})} > \sqrt{5}^{(\sqrt{3}^{\sqrt{3}})}$ である。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{3}^{(\sqrt{5}^{\sqrt{5}})} > \sqrt{5}^{(\sqrt{3}^{\sqrt{3}})}$$