

1

(1)

ユークリッドの互除法を実行すると、

$$\begin{aligned}4788 &= 1254 \cdot 3 + 1026 \\1254 &= 1026 \cdot 1 + 228 \\1026 &= 228 \cdot 4 + 114 \\228 &= 114 \cdot 2\end{aligned}$$

となるから、1254 と 4788 の最大公約数は114 である。以上より、1254 と 4788 の最小公倍数は、

$$\frac{1254 \cdot 4788}{114} = 52668$$

である。

(答) 52668

(2)

$$\begin{aligned}2^{2018} &= \left(10^{\log_{10} 2}\right)^{2018} \\&= 10^{2018 \log_{10} 2} \\&= 10^{2018 \times 0.3010} \\&= 10^{607.418}\end{aligned}$$

より、

$$10^{607} < 2^{2018} < 10^{608}$$

であるから、 2^{2018} は 608 桁である。また、 n を自然数すると、 2^{n+1} の1の位の数字は 2^n の1の位の数字のみで定まる。ここで、

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32$$

であるから、 2^n の1の位の数字は2, 4, 8, 6, 2... と4つの周期で繰り返すことがわかる。ここで、

$$2018 = 4 \cdot 504 + 2$$

であるから、 2^{2018} の1の位の数字は 2^2 の1の位の数字と同じであり、それは数字は4である。

(答)	桁数	608 桁
	1の位の数字	4

(3)

$90^\circ < \theta < 270^\circ$ のとき、 $\cos \theta < 0$ である。これより、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\&= -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} \\&= -\frac{3\sqrt{5}}{7} \\\tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\&= \frac{\frac{2}{7}}{-\frac{3\sqrt{5}}{7}} \\&= -\frac{2\sqrt{5}}{15}\end{aligned}$$

である。

(答)	$\cos \theta = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$
	$\tan \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$

(4)

線分 AB を 3:1 に外分する点の座標は

$$\left(\frac{(-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 0}{3 + (-1)}, \frac{(-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 1}{3 + (-1)}\right) = (1, 2)$$

である。この点と点 B の距離は、

$$\sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

である。以上より、線分 AB を 3:1 に外分する点を中心とし、点 B を通る円の方程式は、

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-2)^2 &= \sqrt{2}^2 \\&\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2\end{aligned}$$

である。

(答) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$

(5)

地点 C から地点 D へ行く最短経路は

$${}_{3+1}C_1 = 4 \text{ (通り)}$$

存在し、地点 D から地点 B へ行く最短経路は

$${}_{2+2}C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

存在する。また地点 C から地点 B へ行く最短経路は

$${}_{5+3}C_3 = 56 \text{ (通り)}$$

存在する。これらより、地点 C から地点 D を通らずに地点 B へ行く最短経路は

$$56 - 4 \cdot 6 = 32 \text{ (通り)}$$

存在する。ここで、地点 A から地点 C へ行く最短経路は

$${}_{4+3}C_3 = 35 \text{ (通り)}$$

存在する。以上より、地点 C を通るが地点 D を通らずに、地点 A から地点 B へ行く最短経路は、

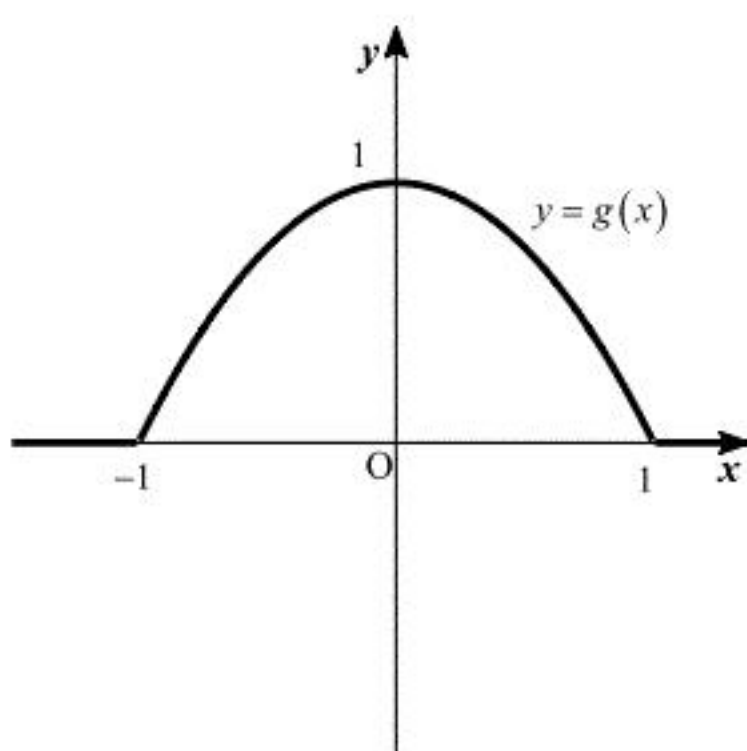
$$32 \cdot 35 = 1120 \text{ (通り)}$$

存在する。

(答) 1120 通り

(1)

$x = \pm 1$ で $g(x)$ が連続になることに注意して $y = g(x)$ のグラフを描くと、下図のようになる。



(答) 前図

(2)

$|t| > 1$ では $g(t) = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} g(t) dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{5}{24} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{5}{24}$

(3)

積分区間の上端の $x+1$ と 1 との大小、すなわち x の正負により場合分けを行う。

[1] $-1 \leq x \leq 0$ のとき

このとき $x+1 \leq 1$ であるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+1} g(t) dt \\ &= \int_x^{x+1} (1-t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_x^{x+1} \\ &= -x^2 - x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

[2] $0 < x \leq 1$ のとき

このとき $x+1 > 1$ であるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+1} g(t) dt \\ &= \int_x^1 g(t) dt \\ &= \int_x^1 (1-t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_x^1 \\ &= \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。以上より、

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + \frac{2}{3} & (-1 \leq x \leq 0 \text{ のとき}) \\ \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3} & (0 < x \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

(答)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + \frac{2}{3} & (-1 \leq x \leq 0 \text{ のとき}) \\ \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3} & (0 < x \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(4)

$0 < x \leq 1$ のとき、

$$f'(x) = x^2 - 1 < 0$$

であるから、 $f(x)$ はこの区間で単調減少する。よって $0 < x \leq 1$ のとき、 $f(x) < f(0)$ である。

一方 $-1 \leq x \leq 0$ のとき、

$$f(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{12}$$

であるから、 $f(x)$ は $x = -\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{11}{12}$ を取る。以上より、 $f\left(-\frac{1}{2}\right) > f(0)$ であるから、 $|x| \leq$

1 のとき、 $f(x)$ は $x = -\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{11}{12}$ を取る。

(答) $x = -\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{11}{12}$

3

(1)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \cdot (-4x) \cdot (1-2x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$$

(2)

点 (p, q) は E 上に存在するから、

$$q = \sqrt{1-2p^2}$$

である。点 (p, q) における E の接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y - q &= -\frac{2p}{\sqrt{1-2p^2}}(x - p) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{2p}{\sqrt{1-2p^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1-2p^2}} \end{aligned}$$

である。以上より、

$$(a, b) = \left(-\frac{2p}{\sqrt{1-2p^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-2p^2}} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(-\frac{2p}{\sqrt{1-2p^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-2p^2}} \right)$$

(3)

変数変換 $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t$ において、 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t$ であり、積分区間は以下ようになる。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
t	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-2x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\right)^2} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \end{aligned}$$

である。

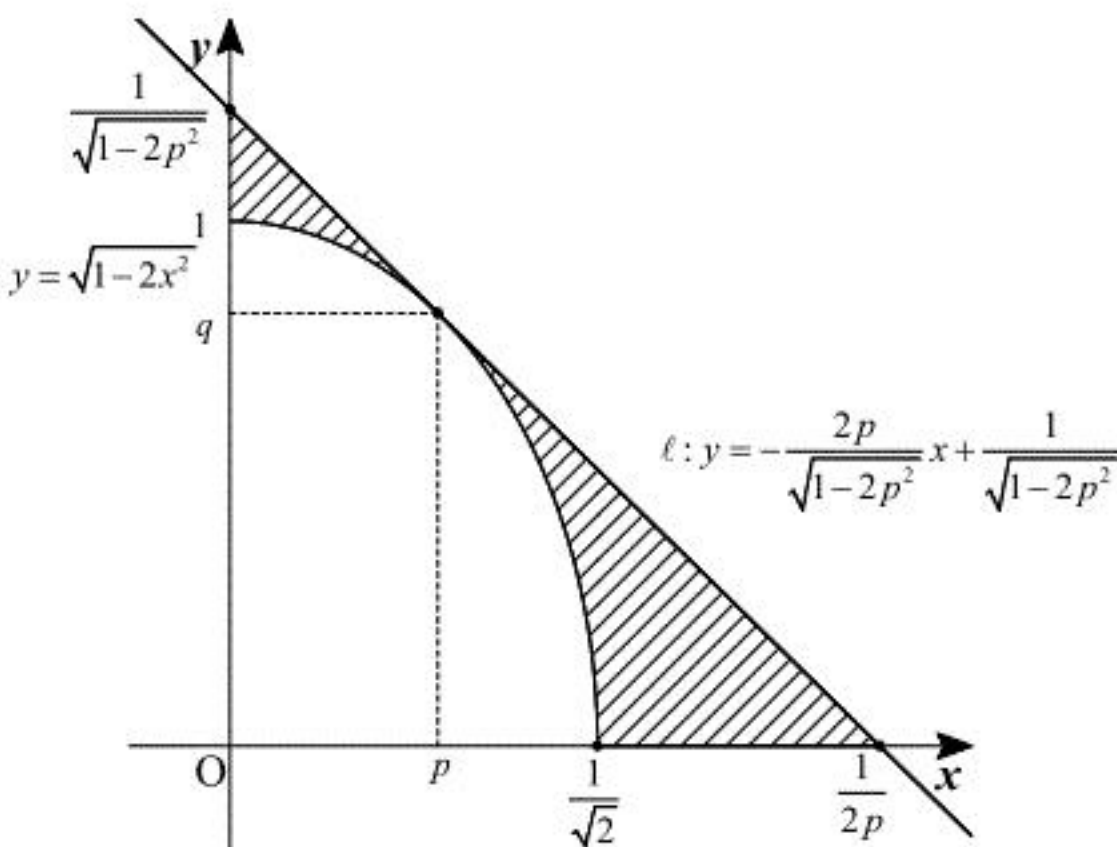
$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

(4)(i)

接線 ℓ と x 軸の交点は、接線 ℓ の方程式で $y=0$ とすることにより $(x, y) = \left(\frac{1}{2p}, 0 \right)$ と求まる。

接線 ℓ と y 軸の交点は、接線 ℓ の方程式で $x=0$ とすることにより $(x, y) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{1-2p^2}} \right)$ と求

まる。これより、接線 ℓ と曲線 E を描いたグラフは下図のようになる。



$S(p)$ は、上図の斜線部分の面積に等しい。これは、接線 ℓ 、 x 軸、 y 軸で囲まれた図形の面積から、曲線 E 、 x 軸、 y 軸で囲まれた図形の面積を引いた値に等しい。以上より、(3)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2p^2}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-2x^2} dx \\ &= \frac{1}{4p\sqrt{1-2p^2}} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S(p) = \frac{1}{4p\sqrt{1-2p^2}} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

(ii)

$0 < p < \frac{1}{\sqrt{2}}$ のもとで $4p\sqrt{1-2p^2} > 0$ であるから、 $S(p)$ が最小値を取るのは、 $4p\sqrt{1-2p^2}$ が最大値を取るときである。ここで、

$$\begin{aligned} 4p\sqrt{1-2p^2} &= 4\sqrt{-2p^4 + p^2} \\ &= 4\sqrt{-2\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}} \end{aligned}$$

であるから、 $4p\sqrt{1-2p^2}$ は $p^2 = \frac{1}{4}$ のとき、すなわち $p = \frac{1}{2}$ のときに最大値を取る。以上より、

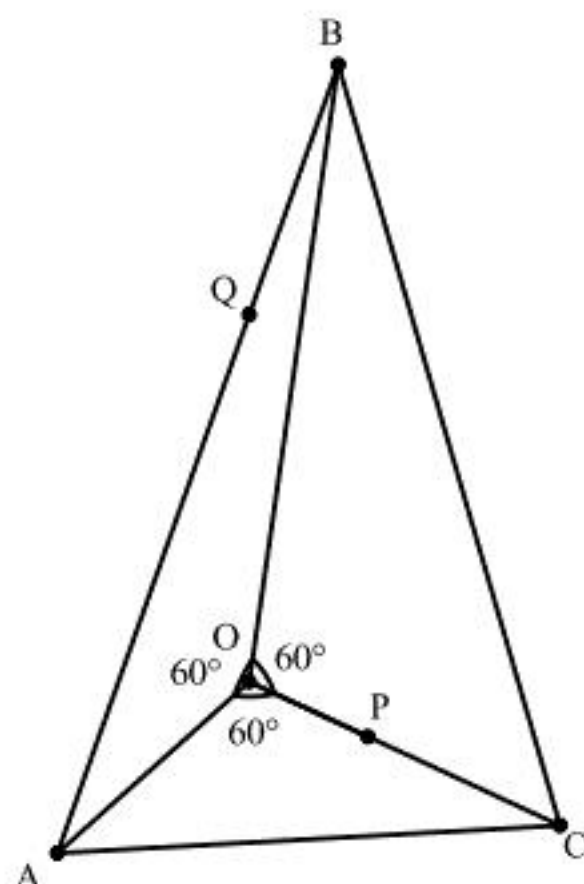
$S(p)$ は $p = \frac{1}{2}$ のときに最小値

$$\frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}\pi}{8}$$

を取る。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}\pi}{8}$$

(1)



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = OB \cdot OC \cdot \cos \angle BOC = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = OA \cdot OC \cdot \cos \angle AOC = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$$

(2)

$$\overrightarrow{OP} = s\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= (1-t)\vec{a} + t\vec{b} - s\vec{c} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PQ} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} - s\vec{c}$$

(3)

$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{OC} \neq \vec{0}$ であるから、

$$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{PQ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{c} \cdot \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b} - s\vec{c}\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t) \cdot \frac{1}{2} + t \cdot 1 - s \cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

(4)

$0 < t < 1$ のとき、 $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} < 1$ であるから、 $s = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ とおける。このとき $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{PQ}$ であるから、

$\triangle OQC$ の面積を S とすると、 $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{PQ}|$ と表される。よって $0 < t < 1$ において、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left| (1-t)\vec{a} + t\vec{b} - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \right) \vec{c} \right| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(1-t)^2 + 4t^2 + \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \right)^2 + 2t(1-t) - t(t+1) - \frac{1}{2}(1-t)(t+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{4} \left(t - \frac{1}{11} \right)^2 + \frac{8}{11}} \end{aligned}$$

となるから、 $\triangle OQC$ の面積は、 $t = \frac{1}{11}$ のとき最小値

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8}{11}} = \frac{\sqrt{22}}{11}$$

を取る。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{11} \text{ のとき最小値 } \frac{\sqrt{22}}{11}$$

(1)

1度目の操作の手順1においては必ず赤玉が選ばれるから、1度目の操作が完了した時点では、袋の中には必ず3個の赤玉と1個の白玉が入っている。よって、

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \\ q_1 &= 0 \\ r_1 &= 0 \end{aligned}$$

である。2度目の操作の手順1においては、 $\frac{3}{4}$ の確率で赤玉が選ばれ、 $\frac{1}{4}$ の確率で白玉が選ばれる。赤玉が選ばれたときは、2度目の操作が完了した時点で袋の中には2個の赤玉と2個の白玉が入っている。白玉が選ばれたときは、2度目の操作が完了した時点で袋の中には4個の赤玉が入っており、終了が宣言される。以上より、

$$\begin{aligned} p_2 &= 0 \\ q_2 &= \frac{3}{4} \\ r_2 &= 0 \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad p_1 &= 1 \\ q_1 &= 0 \\ r_1 &= 0 \\ p_2 &= 0 \\ q_2 &= \frac{3}{4} \\ r_2 &= 0 \end{aligned}$$

(2)

1回の操作で1個の玉を袋から取り出し、1個の玉を袋に入れるから、各操作完了時に袋の中に存在する玉の数は、必ず4個である。

[1] n 回目の操作終了後に袋の中に白玉が1個入っているとき

$n+1$ 回目の操作の手順1において、 $\frac{3}{4}$ の確率で赤玉が選ばれ、 $n+1$ 回目の操作終了後に

袋の中に入っている白玉の数は2個となる。また $\frac{1}{4}$ の確率で白玉が選ばれ、 $n+1$ 回目の操作終了後に袋の中に入っている玉は全て赤玉となる。

n 回目		→	$n+1$ 回目	
白	赤	確率	白	赤
1	3	$\frac{3}{4}p_n$	2	2
1	3	$\frac{1}{4}p_n$	0	4

[2] n 回目の操作終了後に袋の中に白玉が2個入っているとき

$n+1$ 回目の操作の手順1において、 $\frac{1}{2}$ の確率で赤玉が選ばれ、 $n+1$ 回目の操作終了後に

袋の中に入っている白玉の数は3個となる。また $\frac{1}{2}$ の確率で白玉が選ばれ、 $n+1$ 回目の操作終了後に袋の中に入っている白玉の数は1個となる。

n 回目		→	$n+1$ 回目	
白	赤	確率	白	赤
2	2	$\frac{1}{2}q_n$	3	1
2	2	$\frac{1}{2}q_n$	1	3

[3] n 回目の操作終了後に袋の中に白玉が3個入っているとき

$n+1$ 回目の操作の手順1において、 $\frac{1}{4}$ の確率で赤玉が選ばれ、 $n+1$ 回目の操作終了後に

袋の中に入っている玉は全て白玉となる。また $\frac{3}{4}$ の確率で白玉が選ばれ、 $n+1$ 回目の操作終了後に袋の中に入っている白玉の数は2個となる。

n 回目		→	$n+1$ 回目	
白	赤	確率	白	赤
3	1	$\frac{1}{4}r_n$	4	0
3	1	$\frac{3}{4}r_n$	2	2

以上[1][2][3]より、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2}q_n \\ q_{n+1} &= \frac{3}{4}p_n + \frac{3}{4}r_n \\ r_{n+1} &= \frac{1}{2}q_n \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad p_{n+1} &= \frac{1}{2}q_n \\ q_{n+1} &= \frac{3}{4}p_n + \frac{3}{4}r_n \\ r_{n+1} &= \frac{1}{2}q_n \end{aligned}$$

(3)

$t_n = p_n + q_n + r_n$ と定義する。 n 回目の操作終了後に終了が宣言されていない確率は、 t_n に等しい。これより、

$$1 - \sum_{k=1}^r s_k = t_r \qquad \cdots \cdots \text{①}$$

であるから、 $n \geq 2$ のもとでは、①で $r = n$ とした式から $r = n - 1$ とした式を辺々引くと、

$$s_n = -t_n + t_{n-1}$$

であると分かる。ここで、(2)より、

$$t_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + q_n + \frac{3}{4}r_n = \frac{3}{4}t_n + \frac{1}{4}q_n \qquad \cdots \cdots \text{②}$$

$$q_{n+1} = \frac{3}{4}(p_n + r_n) = \frac{3}{4}t_n - \frac{3}{4}q_n \qquad \cdots \cdots \text{③}$$

であると分かる。②の式より

$$q_n = 4t_{n+1} - 3t_n$$

であるから、これを③の式に代入すると、

$$\begin{aligned} 4t_{n+2} - 3t_{n+1} &= \frac{3}{4}t_n - \frac{3}{4}(4t_{n+1} - 3t_n) \\ \Leftrightarrow t_{n+2} &= \frac{3}{4}t_n \qquad \cdots \cdots \text{④} \end{aligned}$$

が得られる。 $t_1 = 1, t_2 = \frac{3}{4}$ であるから、

$$t_n = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

である。以上より、 $n \geq 2$ のもとで n が奇数のときは

$$\begin{aligned} s_n &= -t_n + t_{n-1} \\ &= -\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり、 n が偶数のときは

$$\begin{aligned} s_n &= -t_n + t_{n-1} \\ &= -\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}} \end{aligned}$$

であると分かる。1度目の操作終了後に終了が宣言されることは無いから、これは、 $n = 1$ のときも正しい。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad s_n &= \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

(1)

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

であるから、点 $\left(\frac{3\pi}{4}, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ における $y = f(x)$ の接線の式は、

$$\begin{aligned} y - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow y - \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow y &= -x + \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = -x + \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} \\ &= (1 - 2x^2)e^{-x^2} \\ f''(x) &= (-4x) \cdot e^{-x^2} + (1 - 2x^2) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} \\ &= 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f''(x) = 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2}$$

(3)

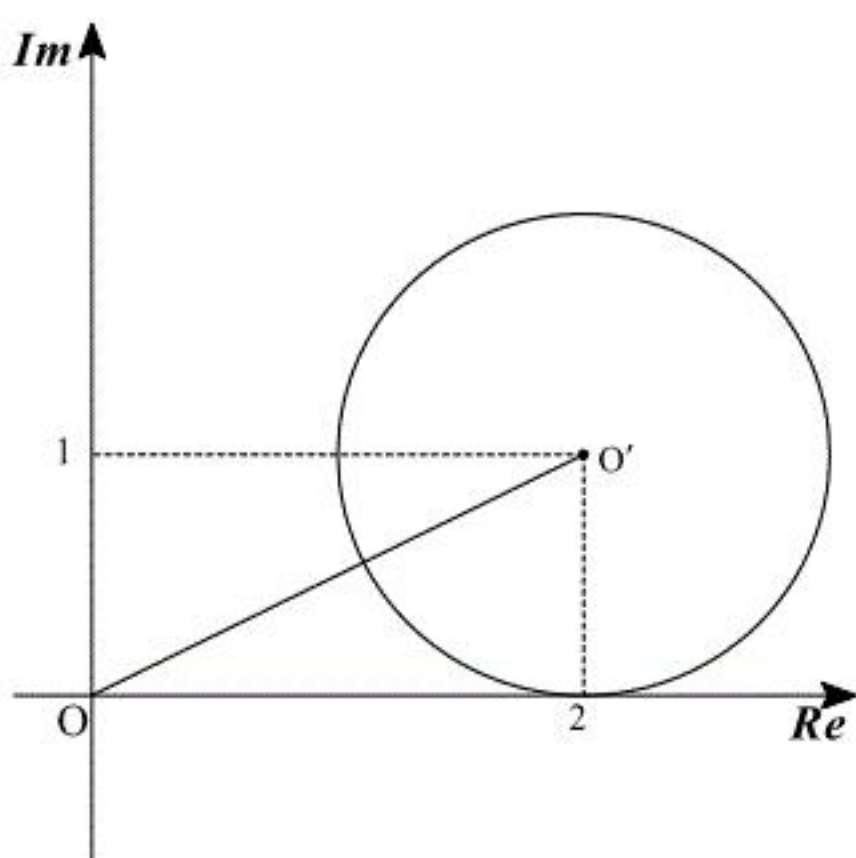
$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx &= \left[\log|e^x - 1| \right]_1^2 \\ &= \log(e^2 - 1) - \log(e - 1) \\ &= \log(e + 1) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \log(e + 1)$$

(4)

$|z - 2 - i| = 1$ が表す図形は、点 $O'(2 + i)$ を中心とする半径1の円であり、円の位置は下図のようになる。



点 $O'(2 + i)$ と原点の距離は

$$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

である。また円上の点のうち $|z|$ が最小となる点は、上図の円と線分 OO' の交点である。よってこのとき $|z|$ の値は

$$|z| = \sqrt{5} - 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{5} - 1$$

(1)

点 R が線分 PQ を $t:(1-t)$ に内分するとき、 $p \neq q$ より、

$$r = (1-t)p + tq$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} r_1 &= \alpha r + \beta \\ &= \alpha \{(1-t)p + tq\} + \beta \\ &= (1-t)\alpha p + t\alpha q + (1-t)\beta + t\beta \\ &= (1-t)p_1 + tq_1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r_1 = (1-t)p_1 + tq_1$$

(2)(i)

$$\begin{aligned} |-2+2i| &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。また、 $-2+2i$ の偏角を θ とおくと、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

が成立する。 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから、 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ である。

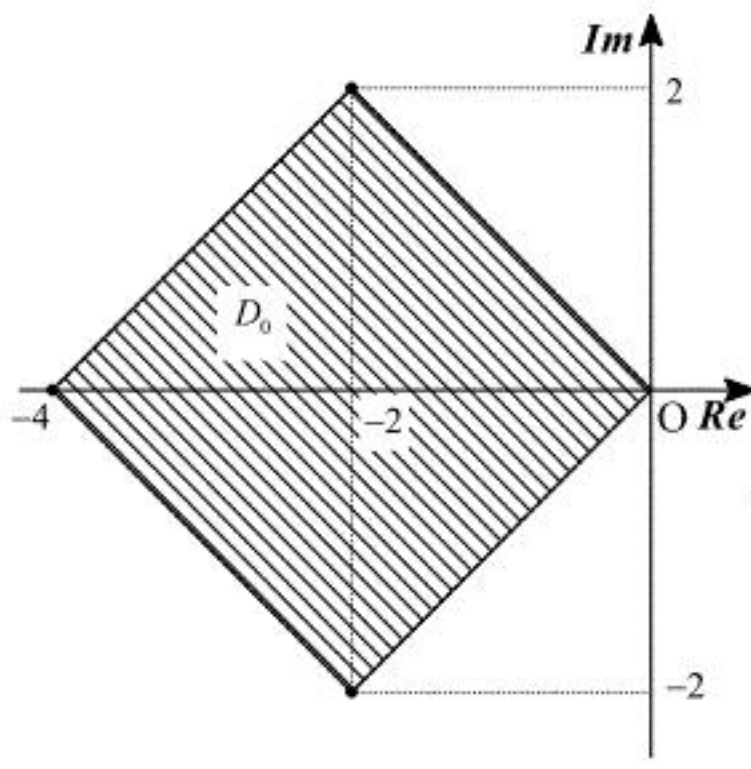
$$(\text{答}) \quad \begin{array}{ll} \text{絶対値} & 2\sqrt{2} \\ \text{偏角} & \frac{3}{4}\pi \end{array}$$

(ii)

$h=0$ のとき、 $w = (-2+2i)z$ である。 $z=0, 1, 1+i, i$ に対応する w はそれぞれ

$$w=0, -2+2i, -4, -2-2i$$

である。ここで、(1)において $\alpha = (-2+2i)$ 、 $\beta=0$ として考えれば、 $w = (-2+2i)z$ の変換において z がある線分上を動くとき、 w も元の線分の端点の変換先を結んだ線分上を動くことが分かる。これより、 z が $z=0, 1, 1+i, i$ の4点を頂点とする正方形の周上を動くとき、 w は $w=0, -2+2i, -4, -2-2i$ の4点を頂点とする正方形の周上を動くことが分かる。以上より、 D_0 の概形は下図の通りとなる。(ただし境界を含む)



(答) 前図 (ただし境界を含む)

(iii)

D_h と A をいずれも虚軸負方向に h 平行移動させることを考えれば、 $S(h)$ は D_0 と、

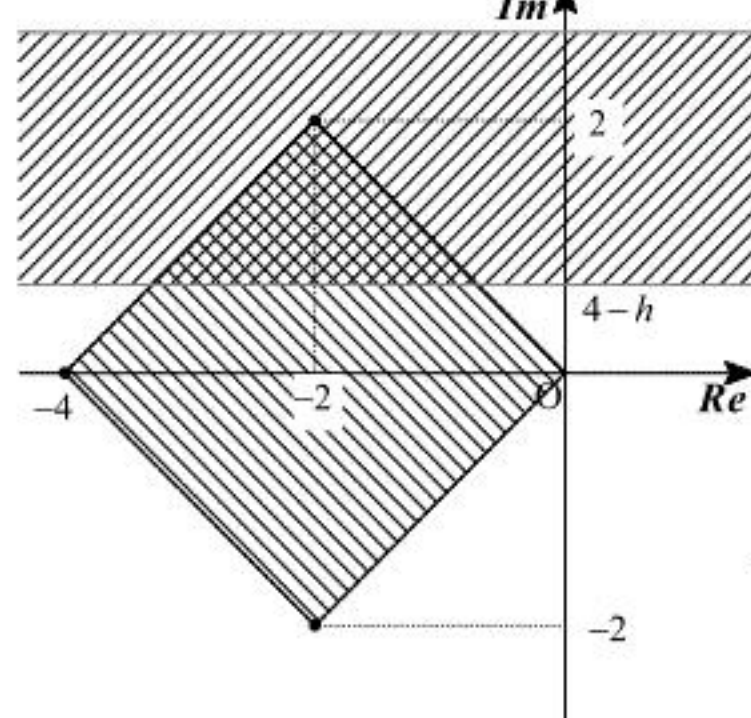
$$A_h = \{x+yi \mid x, y \text{ は実数}, -5 \leq x \leq 5, 4-h \leq y \leq 6-h\}$$

の共通部分の面積に等しい。

[1] $h < 2$ のとき

D_0 と A_h は共通部分を持たないから、 $S(h)=0$ である。

[2] $2 \leq h < 4$ のとき



D_0 と A_h の共通部分は、 D_0 の $4-h \leq y \leq 2$ の部分であるから、

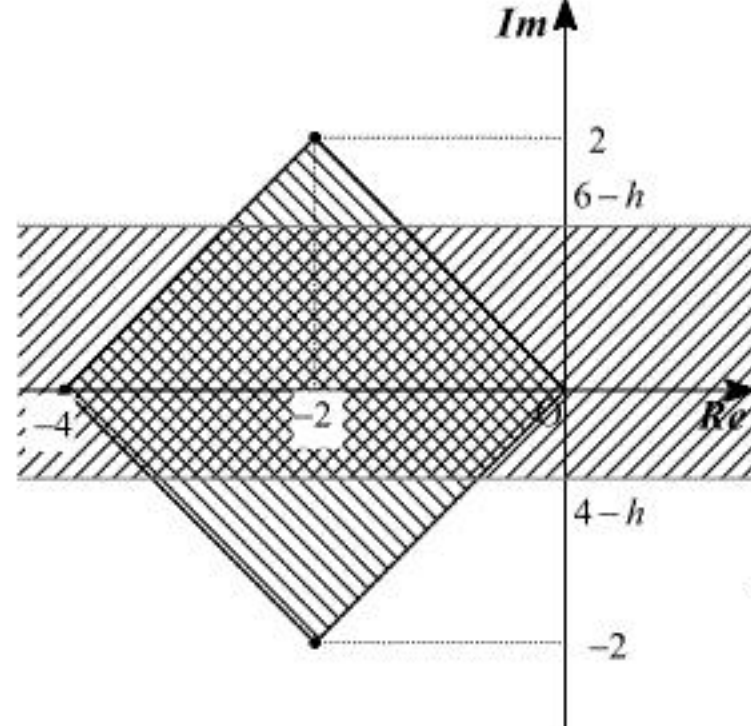
$$\begin{aligned} S(h) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \{2 - (4-h)\}^2 \\ &= (h-2)^2 \end{aligned}$$

である。また $2 \leq h < 4$ のとき、

$$(h-2)^2 < (4-2)^2 = 4$$

である。

[3] $4 \leq h \leq 6$ のとき

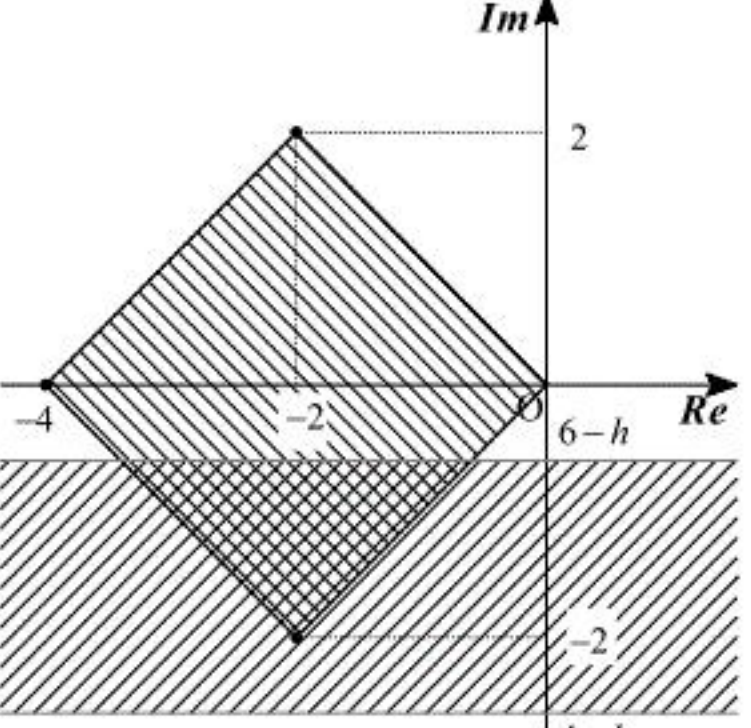


D_0 と A_h の共通部分は、 D_0 の $4-h \leq y \leq 6-h$ の部分であるから、その面積は D_0 のうち A_h に含まれない2つの三角形の面積を引くことで求まる。よって、

$$\begin{aligned} S(h) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \{2 - (6-h)\}^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \{(4-h) - (-2)\}^2 \\ &= -(h-4)^2 - (h-6)^2 + 8 \\ &= -2(h-5)^2 + 6 \end{aligned}$$

である。これは、 $h=5$ のとき最大値6を取る。

[4] $6 < h \leq 8$ のとき



D_0 と A_h の共通部分は、 D_0 の $-2 \leq y \leq 6-h$ の部分であるから、

$$\begin{aligned} S(h) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \{(6-h) - (-2)\}^2 \\ &= (h-8)^2 \end{aligned}$$

である。また $6 < h \leq 8$ のとき

$$(h-8)^2 < (6-8)^2 = 4$$

である。

[5] $8 < h$ のとき

D_0 と A_h は共通部分を持たないから、 $S(h)=0$ である。

以上[1], [2], [3], [4], [5]より、 $S(h)$ は $h=5$ のとき最大値6を取る。

(答) $h=5$ のとき最大値6

(1)

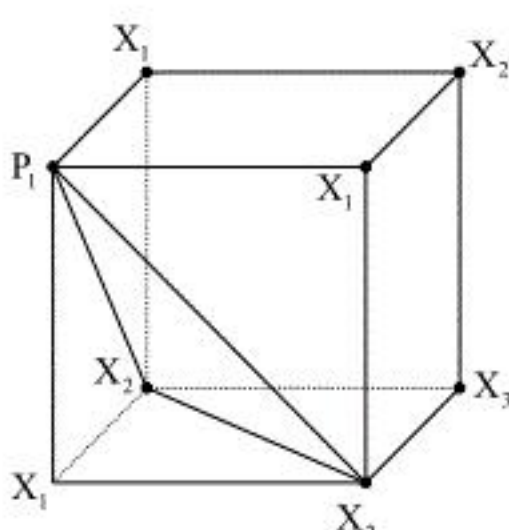
重複を許して P_1, P_2, P_3 を選ぶ選び方は、 8^3 通り存在する。重複を許さずに P_1, P_2, P_3 を選ぶ選び方は、 ${}_8P_3$ 通り存在する。以上より、求める確率は、

$$\frac{{}_8P_3}{8^3} = \frac{21}{32}$$

である。

(答) $\frac{21}{32}$

(2)



以下では点 P_1 は固定して考える。点 P_1 と辺で結ばれている3つの頂点を「距離1の点」、距離1の点と結ばれている4つの頂点のうち、点 P_1 を除いた3つの頂点を「距離2の点」、残りの1つ、 P_1 と立方体の中心をはさんで反対側にある頂点を「距離3の点」と呼ぶことにし、上図においてそれぞれ X_1, X_2, X_3 によって表されている。3点 P_1, P_2, P_3 が異なり、それらが定める平面と立方体の共通部分が三角形となるのは、上図のように2点 P_2, P_3 が異なり、かついずれも距離2の点であるときである。このような事象が発生する確率は、距離2の点があるから、

$$\frac{{}_3P_2}{8^2} = \frac{3}{32}$$

となる。

(答) $\frac{3}{32}$

(3)

3点 P_1, P_2, P_3 が異なるとき、それらが定める平面と立方体の共通部分は四角形または三角形となる。共通部分が三角形となるのは(2)で考えた場合のみであるから、共通部分が四角形となる確率は余事象を考えて(1)(2)の結果を用いると、

$$\frac{21}{32} - \frac{3}{32} = \frac{9}{16}$$

となる。

(答) $\frac{9}{16}$

(4)

頂点 P_3 まで選び終わった状態を考える。このとき、3点 P_1, P_2, P_3 に重複がある確率は

$\frac{11}{32} \left(= 1 - \frac{21}{32} \right)$ である。3点 P_1, P_2, P_3 が異なり、それらが定める平面と立方体の共通部分が三角

形である確率は(2)より $\frac{3}{32}$ である。また3点 P_1, P_2, P_3 が異なり、それらが定める平面と立方体

の共通部分が四角形である確率は(3)より $\frac{9}{16}$ である。

[1] 3点 P_1, P_2, P_3 に重複があるとき

このとき、 P_4 がどの頂点であっても、4点 P_1, P_2, P_3, P_4 は同一平面上に存在する。以上より、3点 P_1, P_2, P_3 に重複があり、かつ4点 P_1, P_2, P_3, P_4 が同一平面上に存在する確率は、

$$\frac{11}{32} \cdot 1 = \frac{11}{32}$$

である。

[2] 3点 P_1, P_2, P_3 が異なり、それらが定める平面と立方体の共通部分が三角形であるとき

このとき、4点 P_1, P_2, P_3, P_4 は同一平面上に存在するための必要十分条件は、点 P_4 が三角形の頂点3点のいずれかとなることである。以上より、3点 P_1, P_2, P_3 が異なり、それらが定める平面と立方体の共通部分が三角形であり、かつ4点 P_1, P_2, P_3, P_4 が同一平面上に存在する確率は、

$$\frac{3}{32} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{256}$$

である。

[3] 3点 P_1, P_2, P_3 が異なり、それらが定める平面と立方体の共通部分が四角形であるとき

このとき、4点 P_1, P_2, P_3, P_4 は同一平面上に存在するための必要十分条件は、点 P_4 が四角形の頂点4点のいずれかとなることである。以上より、3点 P_1, P_2, P_3 が異なり、それらが定める平面と立方体の共通部分が三角形であり、かつ4点 P_1, P_2, P_3, P_4 が同一平面上に存在する確率は、

$$\frac{9}{16} \cdot \frac{4}{8} = \frac{9}{32}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、4点 P_1, P_2, P_3, P_4 が同一平面上に存在する確率は、

$$\frac{11}{32} + \frac{9}{256} + \frac{9}{32} = \frac{169}{256}$$

である。

(答) $\frac{169}{256}$