

1

(1)

$$\alpha = \log_{10} 2, \quad \beta = \log_{10} 3 \text{ であるので,}$$

$$\log_{10} 12 = \log_{10} (2^2 \cdot 3) = 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 2\alpha + \beta$$

$$\log_{10} \frac{1}{18} = \log_{10} (2^{-1} \cdot 3^{-2}) = -\alpha - 2\beta$$

である。

(答) $\log_{10} 12 = 2\alpha + \beta, \quad \log_{10} \frac{1}{18} = -\alpha - 2\beta$

(2)

半角の公式より, $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ であるので,

$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

である。よって, $\theta = \frac{\pi}{12}$ とおくと,

$$\tan^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})^2$$

ここで, $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ であるので, $\tan \frac{\pi}{12} > 0$ であるから,

$$\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

である。

(答) $2 - \sqrt{3}$

(3)

k を, $1 \leq k \leq 100$ を満たす整数とする。 $a = k$ のとき, b の取りうる値の個数は, $101 - k$ である。よって, 求める値は,

$$\sum_{k=1}^{100} (101 - k) = 101 \cdot 100 - \frac{100(100 + 1)}{2} = 5050$$

である。

(答) 5050 個

(4)

2つの直線が直交する条件は, 片方が x 軸に平行でもう片方が y 軸に平行であること, あるいは傾きの積が -1 になることである。 $f'(x) = 2x - 3$ であるので, ℓ_1, ℓ_2 はどちらも y 軸に平行でない。よって, 傾きの積から考えると,

$$\begin{aligned} (2t - 3) \cdot \{2(t + 1) - 3\} &= -1 \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 8t + 3 &= -1 \\ \Leftrightarrow (t - 1)^2 &= 0 \\ \therefore t &= 1 \end{aligned}$$

となる。またこのとき, 直線 ℓ_1 の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= (2 - 3)(x - 1) \\ \Leftrightarrow y &= -x + 1 \end{aligned}$$

であり, 直線 ℓ_2 の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= (4 - 3)(x - 2) \\ \Leftrightarrow y &= x - 2 \end{aligned}$$

である。よって, 交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} -x + 1 &= x - 2 \\ \therefore x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となり, y 座標は

$$y = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

となる。

(答) $t = 1$, 交点 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

(5)

$x \leq 0$ または $x \geq 1$ のとき, $|x(x - 1)| = x(x - 1)$, $0 \leq x \leq 1$ のとき, $|x(x - 1)| = -x(x - 1)$ であるので,

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x(x - 1)| dx &= \int_0^1 \{-x(x - 1)\} dx + \int_1^2 \{x(x - 1)\} dx \\ &= \int_0^1 (-x^2 + x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{3} - \frac{3}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) 1

2

(1)(i)

$f'(x)=2x+2$ であるので、 $f'(x)=0$ となるのは、 $x=-1$ のときである。よって、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ゆえに、最小値は $f(-1)=5$ である。

(答) 5

(ii)

$g'(x)=-2x+2a$ であるので、 $g'(x)=0$ となるのは、 $x=a$ のときである。よって、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

ゆえに、最大値は $g(a)=a^2-4a$ である。

(答) a^2-4a

(iii)

$f(s)$ の最小値が $g(t)$ の最大値以上であればいいので、求める条件は、

$$\begin{aligned} 5 &\geq a^2 - 4a \\ \Leftrightarrow (a-5)(a+1) &\leq 0 \\ \therefore -1 &\leq a \leq 5 \end{aligned}$$

である。

(答) $-1 \leq a \leq 5$

(2)(i)

$h(s)=f(s)-g(s)=2s^2+(2-2a)s+6+4a$ とする。求める a の範囲は、すべての実数 s に対し $h(s) \geq 0$ が成り立つ a の範囲である。 $h'(s)=4s+2-2a$ であるので、 $h'(s)=0$ となるのは、 $s=\frac{a-1}{2}$ のときである。よって、増減表は以下のようになる。

s	$\cdots$	$\frac{a-1}{2}$	$\cdots$
$h'(s)$	$-$	0	$+$
$h(s)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ゆえに、最小値は $h\left(\frac{a-1}{2}\right)$ であるので、求める a の範囲は、

$$\begin{aligned} h\left(\frac{a-1}{2}\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-1)^2 + (1-a)(a-1) + 6 + 4a &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 10a - 11 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (a-11)(a+1) &\leq 0 \\ \therefore -1 &\leq a \leq 11 \end{aligned}$$

である。

(答) $-1 \leq a \leq 11$

(ii)

$-1 \leq s \leq 1$ の範囲で $h(s)$ の増減表をかく。

[1] $\frac{a-1}{2} < -1$ ，すなわち $a < -1$ のとき，

増減表は以下のようになる。

s	-1	$\cdots$	1
$h'(s)$	$\nearrow$	$+$	$\nearrow$
$h(s)$		$\nearrow$	

ゆえに、最小値は $h(-1)$ であり、 $h(-1) \geq 0$ が成り立つ a の範囲は、

$$\begin{aligned} h(-1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2 - 2 + 2a + 6 + 4a &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 6a &\geq -6 \\ \therefore a &\geq -1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a \leq -1$ であるので、条件を満たす a はない。

[2] $-1 \leq \frac{a-1}{2} < 1$ ，すなわち $-1 \leq a < 3$ のとき，

増減表は以下のようになる。

s	-1	$\cdots$	$\frac{a-1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(s)$	$\nearrow$	$-$	0	$+$	$\nearrow$
$h(s)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ゆえに、最小値は $h\left(\frac{a-1}{2}\right)$ であり、 $h\left(\frac{a-1}{2}\right) \geq 0$ が成り立つ a の範囲は、

$$\begin{aligned} h\left(\frac{a-1}{2}\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-1)^2 + (1-a)(a-1) + 6 + 4a &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 10a - 11 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (a-11)(a+1) &\leq 0 \\ \therefore -1 &\leq a \leq 11 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $-1 \leq a < 3$ であるので、求める条件は $-1 \leq a < 3$ である。

[3] $\frac{a-1}{2} \geq 1$ ，すなわち $a \geq 3$ のとき，

増減表は以下のようになる。

s	-1	$\cdots$	1
$h'(s)$	$\nearrow$	$-$	$\nearrow$
$h(s)$		$\searrow$	

ゆえに、最小値は $h(1)$ であり、 $h(1) \geq 0$ が成り立つ a の範囲は、

$$\begin{aligned} h(1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2 + 2 - 2a + 6 + 4a &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2a &\geq -10 \\ \therefore a &\geq -5 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a \geq 3$ であるので、求める条件は $a \geq 3$ である。

以上[1],[2],[3]より、求める条件は $a \geq -1$ である。

(答) $a \geq -1$

(1)

線分 AB の中点が点 $P\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ であるので,

$$\begin{cases} \frac{s+t}{2} = \frac{5}{4} \\ \frac{\log s + \log t}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s+t = \frac{5}{2} \\ \log st = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} s+t = \frac{5}{2} \\ st = 1 \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad s+t = \frac{5}{2}, \quad st = 1$$

(2)

(1)より, $s+t = \frac{5}{2}$, $st = 1$ であるので, s, t は方程式

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

の解である。これを解くと,

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, 2$$

である。ここで, $0 < s < t$ であることから, $(s, t) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ である。ゆえに, 点 $A\left(\frac{1}{2}, -\log 2\right)$, 点 $B(2, \log 2)$ である。

$$(\text{答}) \quad \text{点 } A\left(\frac{1}{2}, -\log 2\right), \quad \text{点 } B(2, \log 2)$$

(3)

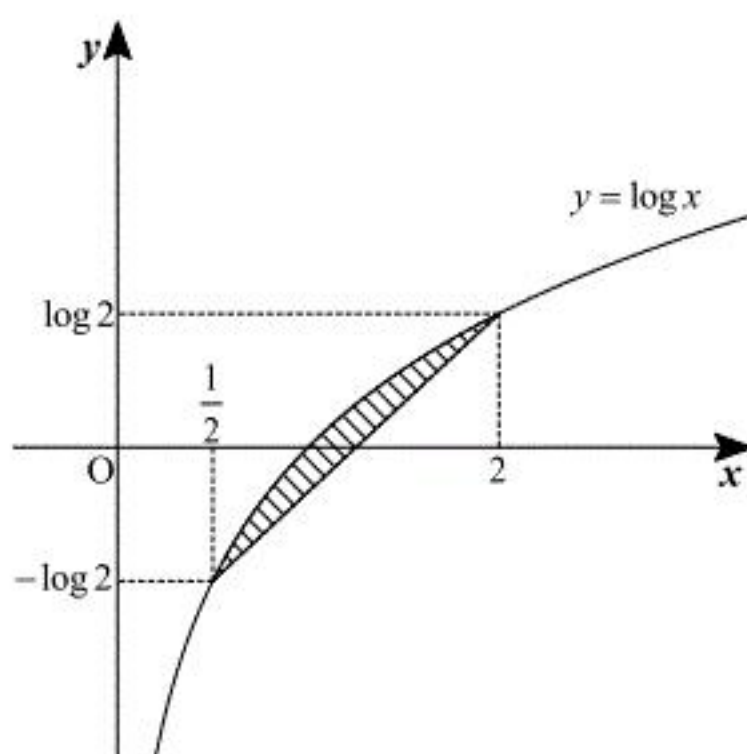
$f(x) = x \log x - x$ であるので,

$$f'(x) = x' \log x + x(\log x)' - x' = \log x$$

である。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \log x$$

(4)



求める面積を S とすると, S は上図の斜線部の面積であるので,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \{\log x + \log 2\} dx - \frac{1}{2} \cdot \{\log 2 - (-\log 2)\} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \{f'(x) + \log 2\} dx - \frac{1}{2} \cdot 2 \log 2 \cdot \frac{3}{2} \\ &= [f(x) + (\log 2)x]_{\frac{1}{2}}^2 - \frac{3}{2} \log 2 \\ &= 2 \log 2 - 2 - \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \log 2 - \frac{3}{2} \log 2 \\ &= \frac{5}{2} \log 2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{2} \log 2 - \frac{3}{2}$$

(1)

$\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, $OA = OB = 1$ であるから,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

(2)(i)

$\overrightarrow{OM} = s\vec{a}$, $\overrightarrow{ON} = s\vec{b}$ であるから,

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = -\vec{a} + s\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = s\vec{a} - \vec{b}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + s\vec{b}, \quad \overrightarrow{BM} = s\vec{a} - \vec{b}$$

(ii)

(2)より,

$$|\overrightarrow{AN}|^2 = |-\vec{a} + s\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2s\vec{a} \cdot \vec{b} + s^2|\vec{b}|^2 = s^2 - s + 1$$

$$|\overrightarrow{BM}|^2 = |s\vec{a} - \vec{b}|^2 = s^2|\vec{a}|^2 - 2s\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = s^2 - s + 1$$

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = (-\vec{a} + s\vec{b}) \cdot (s\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}s^2 - 2s + \frac{1}{2}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{AN}$ と $\overrightarrow{BM}$ がなす角は $\angle APB = \theta$ であるので,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{AN}| |\overrightarrow{BM}|} = \frac{\frac{1}{2}s^2 - 2s + \frac{1}{2}}{s^2 - s + 1} = \frac{s^2 - 4s + 1}{2s^2 - 2s + 2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{s^2 - 4s + 1}{2s^2 - 2s + 2}$$

(iii)

$\overrightarrow{AN}$ と $\overrightarrow{BM}$ が直交するとき、内積 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ となるので、(ii)より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}s^2 - 2s + \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 - 4s + 1 &= 0 \\ \therefore s &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

が求まる。ここで、 $0 < s < 1$ であるため、 $s = 2 - \sqrt{3}$ である。

$$(\text{答}) \quad s = 2 - \sqrt{3}$$

(3)(i)

対称性より、点 P は正三角形である $\triangle AOB$ の $\angle AOB$ の二等分線上にある。ゆえに、実数 k を

用いて、 $\overrightarrow{OP} = k(\vec{a} + \vec{b})$ と表せる。また、点 P は線分 AN 上にあるので、実数 l を用いて

$\overrightarrow{OP} = (1-l)\vec{a} + sl\vec{b}$ と表せる。よって、2つの式を比較すると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} k = 1-l \\ k = sl \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} l = \frac{1}{1+s} \\ k = \frac{s}{1+s} \end{cases} \end{aligned}$$

と求まる。よって、 $\overrightarrow{OP} = \frac{s}{1+s}(\vec{a} + \vec{b})$ である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{s}{1+s}(\vec{a} + \vec{b})$$

(ii)

点 Q は辺 AB の中点であるので、 $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ である。点 P が OQ の中点であるならば、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \frac{s}{1+s} &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow 4s &= 1+s \\ \therefore s &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{1}{3}$$

(1)

1から20までの整数のうち、素数は2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19の8個であり、素数2個の積であるものは4, 6, 9, 10, 14, 15の6個である。各カードの取り出される確率は同様に確からしいので、

$$a_1 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$b_1 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_1 = \frac{2}{5}, \quad b_1 = \frac{3}{10}$$

(2)

T_2 が素数となるのは、1度目と2度目に引き出したカードに書かれている数が、片方が素数であり、もう片方が1である場合である。ゆえに、

$$a_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{25}$$

である。同様に考えると、 T_2 が素数2個の積となるのは、1度目と2度目に引き出したカードに書かれている数が、両方素数であるか、片方が素数2個の積であるものであり、もう片方が1である場合である。よって、

$$b_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{20} \cdot \frac{3}{10} = \frac{19}{100}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{1}{25}, \quad b_2 = \frac{19}{100}$$

(3)

T_n が素数となるのは、1が書かれたカードを $n-1$ 回引き、素数が書かれたカードを1回引いた場合である。よって、求める確率は、

$$a_n = {}_n C_1 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8n}{20^n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{8n}{20^n}$$

(4)

T_n が素数2個の積となるのは、1が書かれたカードを $n-1$ 回引き、素数2個の積である数が書かれたカードを1回引いた場合と、1が書かれたカードを $n-2$ 回引き、素数が書かれたカードを2回引いた場合である。よって、求める確率は、

$$b_n = {}_n C_1 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{10} + {}_n C_2 \left(\frac{1}{20}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6n}{20^n} + \frac{32n(n-1)}{20^n} = \frac{32n^2 - 26n}{20^n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{32n^2 - 26n}{20^n}$$

(1)

$x-1$ の正負について場合分けして考える。

[1] $x-1 \geq 0$, すなわち $x \geq 1$ のとき, 与式を変形すると,

$$x^2 - 4x - 4 \leq -2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 6 \leq 0$$

ここで, $x^2 - 2x - 6 = 0$ の解は

$$x = 1 \pm \sqrt{1+6} = 1 \pm \sqrt{7}$$

であるので, $x \geq 1$ であることから,

$$1 \leq x \leq 1 + \sqrt{7}$$

である。

[2] $x-1 < 0$, すなわち $x < 1$ のとき, 与式を変形すると,

$$x^2 - 4x - 4 \leq -2(-x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 2 \leq 0$$

ここで, $x^2 - 6x - 2 = 0$ の解は

$$x = 3 \pm \sqrt{9+2} = 3 \pm \sqrt{11}$$

であるので, $x < 1$ であることから,

$$3 - \sqrt{11} \leq x < 1$$

である。

以上[1], [2]より, 求める式は, $3 - \sqrt{11} \leq x \leq 1 + \sqrt{7}$ である。

(答) $3 - \sqrt{11} \leq x \leq 1 + \sqrt{7}$

(2)

$f(x) = \log(\log x)$ について, 合成関数の微分を考えると,

$$f'(x) = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x}$$

であるので,

$$f'(e^2) = \frac{1}{2e^2}$$

である。

(答) $f'(e^2) = \frac{1}{2e^2}$

(3)

区分求積法を用いると,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}} \right) \\ &= \int_0^1 x e^x dx \\ &= \int_0^1 x (e^x)' dx \\ &= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - [e^x]_0^1 \\ &= e - e + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 1$

(4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-2x} - \sqrt{3+2x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3-2x} - \sqrt{3+2x})(\sqrt{3-2x} + \sqrt{3+2x})}{x(\sqrt{3-2x} + \sqrt{3+2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-2x - (3+2x)}{x(\sqrt{3-2x} + \sqrt{3+2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{x(\sqrt{3-2x} + \sqrt{3+2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{\sqrt{3-2x} + \sqrt{3+2x}} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-2x} - \sqrt{3+2x}}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$

(1)

$f(x) = \sin x - \sin^2 x$ であるので、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で考えると、

$$f'(x) = \cos x - 2 \sin x (\sin x)' = \cos x - 2 \sin x \cos x$$

である。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \cos x - 2 \sin x \cos x$$

(2)

(1)より、

$$f'(x) = \cos x - 2 \sin x \cos x = \cos x (1 - 2 \sin x)$$

であるので、 $f'(x) = 0$ となるのは、 $\cos x = 0$ のときと、 $\sin x = \frac{1}{2}$ のときである。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の

範囲で考えると、 $x = \frac{\pi}{6}$ のときである。よって、増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0		$\frac{1}{4}$		0

よって、 $f(x)$ は $0 < x < \frac{\pi}{6}$ で単調増加し、 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ で単調減少する。

$$(\text{答}) \quad 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ で単調増加, } \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \text{ で単調減少}$$

(3)(i)

(2)より、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $f(x) \geq 0$ であるので、 $\sin^2 x \leq \sin x$ である。よって、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \left[-\cos x - \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(ii)

求める体積 V は、曲線 $y = \sin x$ と直線 $y = 0$ 、 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転

させてできる体積から、曲線 $y = \sin^2 x$ と直線 $y = 0$ 、 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに

1回転させてできる体積を引いた値であるので、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1 - \cos 2x}{2} - \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{4} + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{8} \right) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8} + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{8} \right) dx \\ &= \left[\frac{x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{32} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{\pi}{16}$$

(1)

複素数 z に対し、 $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ であるので、

$$|z_1| = \sqrt{(2 - \sqrt{3}i)(2 + \sqrt{3}i)} = \sqrt{7}$$

$$|z_2| = \sqrt{(5 + \sqrt{3}i)(5 - \sqrt{3}i)} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

である。

$$(\text{答}) \quad |z_1| = \sqrt{7}, \quad |z_2| = 2\sqrt{7}$$

(2)

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5 + \sqrt{3}i}{2 - \sqrt{3}i} = \frac{(5 + \sqrt{3}i)(2 + \sqrt{3}i)}{(2 - \sqrt{3}i)(2 + \sqrt{3}i)} = \frac{10 - 3 + 7\sqrt{3}i}{7} = 1 + \sqrt{3}i$$

である。また、

$$\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

であるので、 $\angle POQ = \frac{\pi}{3}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{z_2}{z_1} = 1 + \sqrt{3}i, \quad \angle POQ = \frac{\pi}{3}$$

(3)(i)

$$z'_1 = z_1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = (2 - \sqrt{3}i) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{1}{2} (2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3i + 2i) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z'_2 = z_2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = (5 + \sqrt{3}i) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{1}{2} (5\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3i + 5i) = 2\sqrt{3} + 4i$$

となる。

$$(\text{答}) \quad z'_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad z'_2 = 2\sqrt{3} + 4i$$

(ii)

実数 k を用いて、直線 OQ 上の任意の点は kz_2 と表せる。同様に、実数 s を用いて、直線 $P'Q'$ 上の任意の点は $sz'_1 + (1-s)z'_2$ と表せる。点 $R(w)$ は直線 OQ 上にありかつ直線 $P'Q'$ 上にあるので、

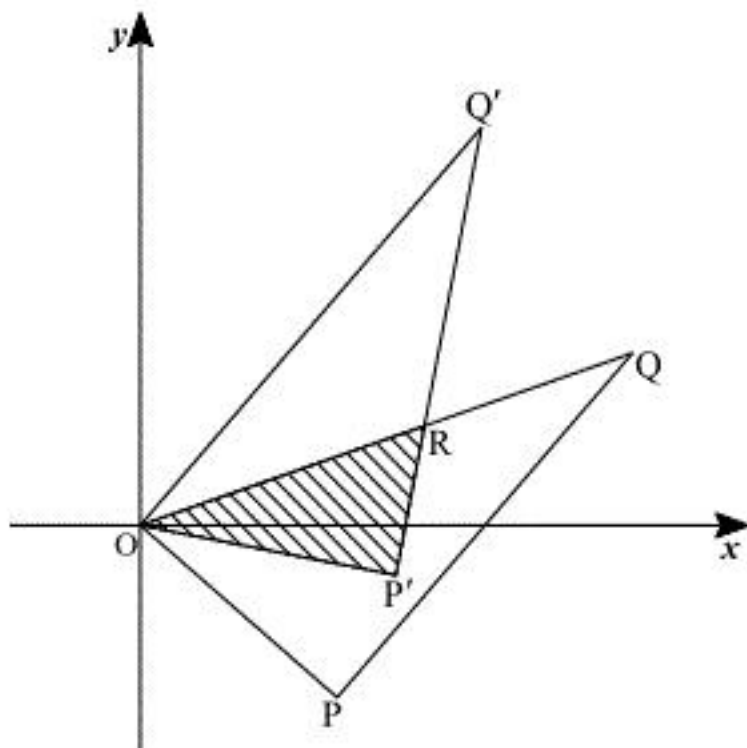
$$\begin{aligned} k(5 + \sqrt{3}i) &= s \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) + (1-s)(2\sqrt{3} + 4i) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5k = \frac{3\sqrt{3}}{2}s + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}s \\ \sqrt{3}k = -\frac{1}{2}s + 4 - 4s \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 10k = \sqrt{3}(-s + 4) \\ 6k = \sqrt{3}(-9s + 8) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 10k = \sqrt{3}(-s + 4) \\ 10k \cdot 9 - 6k = \sqrt{3}(-s + 4) \cdot 9 - \sqrt{3}(-9s + 8) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 10k = \sqrt{3}(-s + 4) \\ 84k = 28\sqrt{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{2}{3} \\ k = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって、 $w = \frac{5\sqrt{3}}{3} + i$ である。

$$(\text{答}) \quad w = \frac{5\sqrt{3}}{3} + i$$

(iii)

求める面積は下図の斜線部分である。



よって、求める面積は $\triangle OP'R$ の面積であるので、

$$S = \frac{1}{2} \left| \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{14\sqrt{3}}{6} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

(1)

時刻 t に対し、動点が O にいる確率を $P(t)$ 、動点が O と隣接する頂点にいる確率を $Q(t)$ 、動点が O と隣接していなく、かつ O と隣接するいずれかの頂点と隣接する頂点にいる確率を $R(t)$ 、それ以外の確率を $S(t)$ と置く。このとき、

$$P(0)=1, Q(0)=R(0)=S(0)=0$$

$$\begin{cases} P(n+1)=\frac{1}{4}P(n)+\frac{1}{4}Q(n) \\ Q(n+1)=\frac{3}{4}P(n)+\frac{1}{4}Q(n)+\frac{1}{2}R(n) \\ R(n+1)=\frac{1}{2}Q(n)+\frac{1}{4}R(n)+\frac{3}{4}S(n) \\ S(n+1)=\frac{1}{4}R(n)+\frac{1}{4}S(n) \end{cases}$$

が成り立つ。よって、 $P(1)=\frac{1}{4}$ 、 $Q(1)=\frac{3}{4}$ 、 $R(1)=S(1)=0$ であるので、

$$Q(2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

である。

(答) $\frac{3}{8}$

(2)

(1)より、

$$P(2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$Q(2)=\frac{3}{8}$$

$$R(2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

$$S(2)=0$$

であるので、

$$Q(3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{32}$$

である。

(答) $\frac{15}{32}$

(3)

(1)(2)より、

$$P(3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{5}{32}$$

$$Q(3)=\frac{15}{32}$$

$$R(3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{32}$$

$$S(3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{32}$$

であるので、

$$Q(4)=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{32}+\frac{1}{4}\cdot\frac{15}{32}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{32}=\frac{3}{8}$$

である。

(答) $\frac{3}{8}$

(4)

(1)(3)より、

$$P(4)=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{32}+\frac{1}{4}\cdot\frac{15}{32}=\frac{5}{32}$$

$$Q(4)=\frac{3}{8}$$

$$R(4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{32}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{32}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{32}=\frac{48}{128}=\frac{3}{8}$$

であるので、

$$Q(5)=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{32}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{51}{128}$$

である。

(答) $\frac{51}{128}$