

第1問

(1)

$n(X)$ で集合 X の要素の個数を表す。0以上の整数 k を用いて $n(A\cap B)=k$ とすると、

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=33+36-k\\&=69-k\end{aligned}$$

である。 $(A\cup B)\subset U$ であるから

$$\begin{aligned}n(A\cup B)\leq n(U) &\Leftrightarrow 69-k\geq 50\\&\Leftrightarrow k\geq 19\end{aligned}$$

となる。よって、

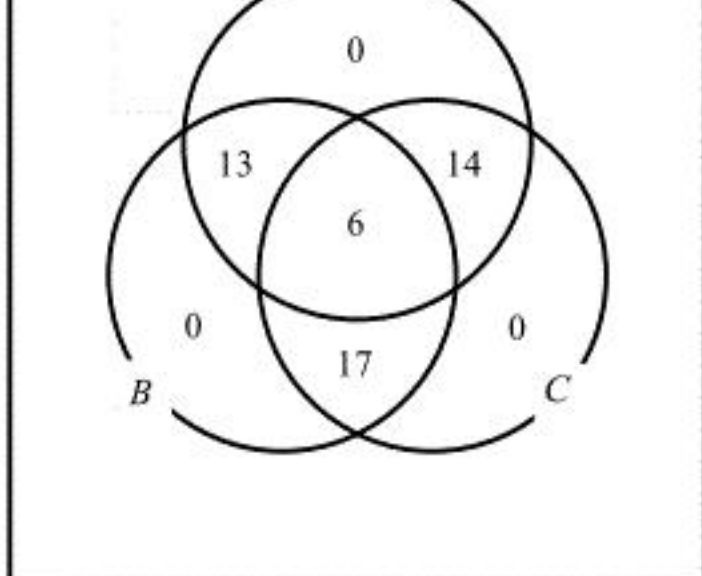
$$n(\overline{A\cap B})=50-k\leq 50-19=31$$

$$\therefore n\left(C\cap\left(\overline{A\cap B}\right)\right)\leq n(\overline{A\cap B})\leq 31$$

が成り立つ。 $n(C)=37$ であるから、 $n(C)=n(C\cap(A\cap B))+n\left(C\cap\left(\overline{A\cap B}\right)\right)$ より

$$\begin{aligned}37&\leq n(A\cap B\cap C)+31\\&\Leftrightarrow n(A\cap B\cap C)\geq 6\end{aligned}$$

となる。等号が成立するのは $k=19$ のときであり、ベン図は以下のように図示できる。



これは問題文の条件を満たす。よって、求める最小値は6である。

(答) 6

(2)

70以上の2桁の素数は、71, 73, 79, 83, 89, 97であり、この平均値は

$$\frac{71+73+79+83+89+97}{6}=82$$

であるから、標準偏差は、

$$\sqrt{\frac{(71-82)^2+(73-82)^2+(79-82)^2+(83-82)^2+(89-82)^2+(97-82)^2}{6}}=\sqrt{81}=9$$

となる。

(答) 9

(3)

まず、小数第5位を四捨五入したとき $\log_{10}3=0.4771$ となることから、

$$0.47705\leq\log_{10}3<0.47715$$

である。不等式 $(0.9)^n<0.01$ について両辺ともに正であり、その常用対数を取ると底が1より

大きいから不等号の向きは変わらず、

$$\begin{aligned}\log_{10}(0.9)^n &< \log_{10}(0.01)\\&\Leftrightarrow n\log_{10}\left(\frac{3^2}{10}\right)<\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right)\\&\Leftrightarrow n(2\log_{10}3-1)<-2\\&\Leftrightarrow n>\frac{2}{1-2\log_{10}3}\end{aligned}$$

となる。ここで $2\log_{10}3-1<2\cdot0.47715-1=-0.0457<0$ を用いた。さらに、

$$\begin{aligned}\frac{2}{1-2\cdot0.47705} &\leq \frac{2}{1-2\log_{10}3} < \frac{2}{1-2\cdot0.47715}\\&\Leftrightarrow 43.5\dots\leq \frac{2}{1-2\log_{10}3} < 43.7\dots\end{aligned}$$

であるから、 $(0.9)^n<0.01$ を満たす最小の整数 n は44である。

(答) $n=44$

(4)

$r^2=x^2+y^2$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ が成り立つから、与えられた極方程式の両辺に r をかけて、

$$\begin{aligned}r^2 &= 2(r\cos\theta+r\sin\theta)\\&\Leftrightarrow x^2+y^2=2x+2y\\&\Leftrightarrow (y-1)^2+(x-1)^2=2\end{aligned}$$

となる。これに $x=1$ を代入して、

$$\begin{aligned}(y-1)^2 &= 2\\&\Leftrightarrow y=1\pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $y=1\pm\sqrt{2}$

(5)

$A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とする。 $\triangle ABC$ は $\angle A$ を直角とする直角二等辺三角形であるから、点Aを

中心に点Bを $\pm\frac{\pi}{2}$ 回転させると点Cに一致する。したがって、

$$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)\cdot\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \gamma=(\beta-\alpha)\cdot(\pm i)+\alpha$$

$$\Leftrightarrow \gamma=\{(4+4i)-(2+i)\}\cdot(\pm i)+(2+i)$$

$$\Leftrightarrow \gamma=\pm(-3+2i)+(2+i) \text{ (複号同順)}$$

となる。よって $\gamma=-1+3i, 5-i$ と求まる。

(答) $-1+3i, 5-i$

(6)

まず $\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから、

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b\right)\cdot\frac{1}{x}=0\cdot0=0 \qquad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b\right)\cdot\frac{1}{x} &= \lim_{x\rightarrow\infty}\left(\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\right)\\&= \sqrt{3+0+0}+a+0\\&= a+\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots\textcircled{2}\end{aligned}$$

である。①、②より、

$$a+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow a=-\sqrt{3}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b\right) &= \lim_{x\rightarrow\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{3}x+b\right)\\&= \lim_{x\rightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1-3x^2}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3}x}+b\right)\\&= \lim_{x\rightarrow\infty}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3}x}+b\right)\\&= \lim_{x\rightarrow\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3}}+b\right)\\&= \frac{2+0}{\sqrt{3+0+0}+\sqrt{3}}+b\\&= \frac{1}{\sqrt{3}}+b\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\lim_{x\rightarrow\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b\right)=0$ より

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+b=0\Leftrightarrow b=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

と求まる。以上より、求める値は $a=-\sqrt{3}$, $b=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(答) $a=-\sqrt{3}$, $b=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(7)

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\log 2x)' \cdot \frac{1}{x^2} + (\log 2x) \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)'\\&= \frac{1-2\log 2x}{x^3}\end{aligned}$$

である。 $x>0$ より $x^3>0$ であるから $f'(x)$ の符号は $1-2\log 2x$ の符号に一致する。ここで、

$1-2\log 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{e}}{2}$ であるから、 $f'(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\sqrt{e}}{2}$	...
$f'(x)$	↘	+	0	-
$f(x)$	↘	↗	極大	↘

よって $f(x)$ は $x=\frac{\sqrt{e}}{2}$ で最大値を取り、その値は

$$f\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)=\frac{\log\left(2\cdot\frac{\sqrt{e}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^2}=\frac{2}{e}$$

と求まる。

(答) $\frac{2}{e}$

(8)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3(1-\cos t)\\ \frac{dy}{dt} &= 3\sin t\end{aligned}$$

であるから、この曲線の長さは、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\{3(1-\cos t)\}^2+(3\sin t)^2}dt\\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{2-2\cos t}dt\\&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)}dt\\&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt\\&= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt\end{aligned}$$

である。ここで $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ のとき $\sin\frac{t}{2}\geq 0$ であるから、

$$6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{t}{2}dt=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{t}{2}dt=6\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6\{-\sqrt{2}-(-2)\}=12-6\sqrt{2}$$

が求める曲線の長さとなる。

(答) $12-6\sqrt{2}$

第2問

(1)

3枚目までに引いたカードのアルファベットの組み合わせで場合分けする。全ての試行において3枚目までのカードの引き方の総数は、 ${}_9P_3$ 通りであり、いずれの引き方も同様に確からしい。このとき3枚目までのカードのアルファベットの組み合わせはAAB, AAC, BBC, BBA, CCA, CCB, ABCの7通りが考えられる。組み合わせの対称性から、このうちAAB, ABCの場合を考えれば十分である。

[1] 引いたカードのアルファベットの組み合わせがAABの場合

2枚のAのカードに書かれた数字の組み合わせとして(1, 2), (2, 3), (3, 1)が考えられる。まず、Bのカードの数字が1の場合を考える。2枚のAのカードに書かれた数字の組み合わせが(1, 2), (3, 1)の場合に4枚目で操作が終了するのは、4枚目に残りの6枚からAのカード、あるいは1のカードのいずれか1枚を引いた場合であり、この確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。一方で(2, 3)の場合に4枚目で操作が終了するのは、4枚目に残りの6枚からAのカードを引いた場合であり、この確率は $\frac{1}{6}$ である。カードの対称性よりBのカードの数字が2, 3の時も同様の議論ができる。よって、4枚目のカードを引いたときに確率 $\frac{1}{3}$ で得点が4点となるような3枚目までのカードの組み合わせが $2 \cdot 3 = 6$ (通り)存在し、確率 $\frac{1}{6}$ で得点が4点となるような3枚目までのカードの組み合わせが3通り存在する。この議論はAAC, BBC, BBA, CCA, CCBの場合でも同様に成り立つ。

[2] 引いたカードのアルファベットの組み合わせがABCの場合

4枚目で操作が終了するためにはA, B, Cのカードに書かれている数字のうち2個が同じでなければならない。このとき2個の同じ数字の選び方が3通り、それぞれに対して残り1枚の数字の選び方が2通りあり、さらに数字とアルファベットの組み合わせが ${}_3C_2 = 3$ (通り)ある。よって、このような組み合わせは $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ (通り)存在する。また、このとき4枚目で操作が終了するのは同じ数字が3つ揃う場合で、その確率は $\frac{1}{6}$ である。

以上,[1],[2]より、4枚目のカードを引いたときに確率 $\frac{1}{3}$ で得点が4点となるような3枚目までのカードの引き方は $6 \cdot 6 \cdot 3! = 6^3$ (通り)、確率 $\frac{1}{6}$ で得点が4点となるような3枚目までのカードの引き方は $(3 \cdot 6 + 18) \cdot 3! = 6^3$ (通り)存在する。よって、求める確率は

$$\frac{6^3}{{}_9P_3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6^3}{{}_9P_3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{14}$$

となる。

(答) $\frac{3}{14}$

(2)

4枚目までに引いたカードのアルファベットの組み合わせで場合分けする。全ての試行において4枚目までカードを引いたと考えると、4枚目までのカードの引き方の総数は、 ${}_9P_4$ 通りであり、いずれの引き方も同様に確からしい。5点となる場合、4枚目の時点では操作が続いていることから、アルファベットの組み合わせはAABB, BBCC, CCAA, AABC, ABBC, ABCCの6通りが考えられる。組み合わせの対称性から、このうちAABB, AABCの場合を考えれば十分である。

[1] 引いたカードのアルファベットの組み合わせがAABBの場合

2枚のAのカード、Bのカードに書かれた数字の組み合わせとして(1, 2), (2, 3), (3, 1)が考えられる。まず、A, Bのカードの数字の組み合わせが共に(1, 2)の場合を考える。このとき5枚目で操作が終了するのは、5枚目に残りの5枚からC3以外の4枚のカードから1枚を引いた場合であり、この確率は $\frac{4}{5}$ である。これはA, Bのカードの数字の組み合わせが共に(2, 3), (3, 1)の場合も成り立つ。一方で、A, Bのカードの数字の組み合わせがそれぞれ(1, 2), (2, 3)の場合に5枚目で操作が終了するのは、5枚目に残りの5枚からA3, B1, C2のいずれかのカードを引いた場合であり、この確率は $\frac{3}{5}$ である。これはA, Bのカードの数字の組み合わせが異なる、残り $3 \cdot 2 - 1 = 5$ (通り)の場合でも成り立つ。以上の議論はBBCC, CCAAの場合でも同様に成り立つため、5枚目のカードを引いたときに確率 $\frac{4}{5}$ で得点が5点となるような4枚目までのカードの組み合わせは $3 \cdot 3 = 9$ (通り)存在し、確率 $\frac{3}{5}$ で得点が5点となるような4枚目までのカードの組み合わせが $6 \cdot 3 = 18$ (通り)存在する。

[2] 引いたカードのアルファベットの組み合わせがAABCの場合

2枚のAのカードに書かれた数字の組み合わせとして(1, 2), (2, 3), (3, 1)が考えられる。まず、この数字の組み合わせが(1, 2)の場合を考える。B, Cのカードの組み合わせが(B1, C2)または(B2, C1)の場合に5枚目で操作が終了するのは、5枚目に残りの5枚からB3, C3以外の3枚のカードから1枚を引いた場合であり、この確率は $\frac{3}{5}$ である。また、B, Cのカードの組み合わせが(B1, C3), (B2, C3), (B3, C1), (B3, C2)のいずれかである場合に5枚目で操作が終了するのは、5枚目に残りの5枚からA3を引く場合または1, 2のどちらかを3枚そろえるカードを引く場合であり、この確率は $\frac{2}{5}$ である。そして、B, Cのカードの組み合わせが(B3, C3)の場合に5枚目で操作が終了するのは、5枚目に残りの5枚からA3を引く場合であり、この確率は $\frac{1}{5}$ である。2枚のAのカードに書かれた数字の組み合わせが(2, 3), (3, 1)の場合も同様であり、さらにこれらの議論はABBC, ABCCの場合も同様に成り立つ。よって、5枚目のカードを引いたときに確率 $\frac{3}{5}$ で得点が5点となるような4枚目までのカードの組み合わせは $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ (通り)、確率 $\frac{2}{5}$ で得点が5点となるような4枚目までのカードの組み合わせが $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ (通り)、そして確率 $\frac{1}{5}$ で得点が5点となるような4枚目までのカードの組み合わせが $3 \cdot 3 = 9$ (通り)存在する。

以上,[1],[2]より、5枚目のカードを引いたときに確率 $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ で得点が5点となるような4枚目までのカードの引き方はそれぞれ $9 \cdot 4!$ 通り、 $(18 + 18) \cdot 4! = 36 \cdot 4!$ (通り)、 $36 \cdot 4!$ (通り)、 $9 \cdot 4!$ (通り)ずつ存在する。よって、求める確率は

$$\frac{9 \cdot 4!}{{}_9P_4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{36 \cdot 4!}{{}_9P_4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{36 \cdot 4!}{{}_9P_4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{9 \cdot 4!}{{}_9P_4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{14}$$

となる。

(答) $\frac{5}{14}$

(3)

与えられた条件より、3枚以上カードを引かないと操作は終了しない。また、カードが7枚以上あると必ず同じアルファベット、または同じ数字が書かれた3枚が1組以上揃う。したがって、得点は3点から7点までの間の整数になる。

まず、3点になる確率を求める。全ての試行において3枚目までのカードの引き方の総数は、 ${}_9P_3$ 通りであり、いずれの引き方も同様に確からしい。3点になるのは最初の3枚が全て同じアルファベットまたは数字であるときで、このような引き方は $6 \cdot 3! = 36$ (通り)ある。よって、3点になる確率は $\frac{36}{{}_9P_3} = \frac{1}{14}$ である。

次に、6点となる確率を求める。以下では、5枚目までに引いたカードのアルファベットの組み合わせで場合分けして求める。全ての試行において5枚目までカードを引いたと考えると、5枚目までのカードの引き方の総数は、 ${}_9P_5$ 通りであり、いずれの引き方も同様に確からしい。6点となる場合、5枚目の時点では操作が続いていることから、考えられる組み合わせはAABBC, BBCCA, CCAABがあるが、対称性からAABBCの場合を考えれば十分である。同じアルファベットに書かれた数字の組み合わせは(1, 2), (2, 3), (3, 1)のいずれかであり、AA, BBの組の数字の組み合わせが同じかどうかで場合分けする。

[1] AA, BBの数字の組が同じとき

Cのカードの数字はAA, BBの数字の組に含まれないものでなければならない。このとき、6枚目として、残る4枚の中からいずれのカードを引いても操作が終了する。また、AA, BBの数字の組の選び方は3通りである。

[2] AA, BBの数字の組が異なるとき

Cのカードの数字はAA, BBの数字の組で重複していない2つの数字のうちのいずれかでなければならない。このとき、6枚目として、残る4枚の中からAA, BBの数字の組で重複していない2つの数字のいずれかが書かれたCのカードのうち残っている1枚以外の3枚のいずれかを引けば操作が終了し、この確率は $\frac{3}{4}$ である。また、AA, BBの数字の組の選び方は ${}_2P_2 = 6$ (通り)である。

以上,[1],[2]より、アルファベットの組み合わせがAABBCの時、6枚目のカードを引いた時に必ず6点となる5枚目までのカードの引き方が $3 \cdot 5!$ 通り、確率 $\frac{3}{4}$ で6点となる5枚目までのカードの組み合わせが $2 \cdot 6 \cdot 5! = 12 \cdot 5!$ (通り)存在する。BBCCA, CCAABの場合も同様の議論が成り立つことから、6点となる確率は、

$$\frac{3 \cdot 5! \cdot 3}{{}_9P_5} + \frac{12 \cdot 5! \cdot 3}{{}_9P_5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{7}$$

である。

最後に、7点になる確率を求める。全ての試行において6枚目までカードを引いたと考えると、6枚目までのカードの引き方の総数は、 ${}_9P_6$ (通り)であり、いずれの引き方も同様に確からしい。7点になるのは、カードを6枚引いて各アルファベット及び数字が2つずつになるときであり、7枚目として何を引いても操作が終了する。このとき同じアルファベットに書かれた数字の組み合わせは(1, 2), (2, 3), (3, 1)のいずれかであり、この組が重複なくA, B, Cに割り振られている必要がある。このような組み合わせは $3! = 6$ (通り)ある。よって、7点となる

確率は $\frac{6 \cdot 6!}{{}_9P_6} = \frac{1}{14}$ である。

以上の議論より、求める期待値は、

$$\frac{1}{14} \cdot 3 + \frac{3}{14} \cdot 4 + \frac{5}{14} \cdot 5 + \frac{2}{7} \cdot 6 + \frac{1}{14} \cdot 7 = \frac{71}{14}$$

である。

(答) $\frac{71}{14}$

第3問

頂点Eを原点とし、 $\overrightarrow{EF}$ 方向にx軸を、 $\overrightarrow{EH}$ 方向にy軸を、 $\overrightarrow{EA}$ 方向にz軸をとる。このとき、 $P(1, t, 1)$, $Q(0, 1, 1-t)$, $R(t, 0, 0)$ である。また、 $\overrightarrow{AG} = (1, 1, -1)$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{AG} &= (1-t, t, 1) \cdot (1, 1, -1) \\ &= 1-t+t-1 \\ &= 0 \\ \overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{AG} &= (-t, 1, 1-t) \cdot (1, 1, -1) \\ &= -t+1-(1-t) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle PQR$ と直線AGは垂直である。よって、求める体積は $\triangle PQR$ の面積 $S(t)$ を直線AGに沿って積分したものとなる。ここで、 $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1-t, -t)$, $\overrightarrow{QR} = (t, -1, t-1)$, $\overrightarrow{RP} = (1-t, t, 1)$ より、

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{RP}| = \sqrt{1^2 + t^2 + (1-t)^2} = \sqrt{2(t^2 - t + 1)}$$

であるから、 $\triangle PQR$ は辺の長さが $\sqrt{2(t^2 - t + 1)}$ の正三角形だと分かる。つまり、

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{2(t^2 - t + 1)} \right\}^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (t^2 - t + 1)\end{aligned}$$

である。また、 $\triangle PQR$ と直線AGの交点をIとすると、点Iは三角錐A-PQRにおいて点Aから $\triangle PQR$ へおろした垂線の足となる。さらに、 $\overrightarrow{AP} = (1, t, 0)$, $\overrightarrow{AQ} = (0, 1, -t)$, $\overrightarrow{AR} = (t, 0, -1)$ より

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}| = |\overrightarrow{AR}| = \sqrt{t^2 + 1}$$

であるから、 $\triangle AIP \equiv \triangle AIQ \equiv \triangle AIR$ が示される。よって、 $PI = QI = RI$ であるから、点Iは $\triangle PQR$ の外心であり、線分PIは外接円の半径だと分かる。よって $\triangle PQR$ において正弦定理より、

$$\begin{aligned}2PI &= \frac{PQ}{\sin \frac{\pi}{3}} \\ \Leftrightarrow PI &= \sqrt{\frac{2}{3}(t^2 - t + 1)}\end{aligned}$$

と求まる。 $\angle AIP = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形である $\triangle API$ に注目すると、 $PI = \sqrt{\frac{2}{3}(t^2 - t + 1)}$,

$AP = \sqrt{t^2 + 1}$ であるから、辺AIの長さを h として三平方の定理より、

$$\begin{aligned}h &= \sqrt{AP^2 - PI^2} \\ &= \sqrt{t^2 + 1 - \left\{ \frac{2}{3}(t^2 - t + 1) \right\}} \\ &= \sqrt{\frac{(t+1)^2}{3}} \\ &= \frac{t+1}{\sqrt{3}} \quad (\because t+1 > 0)\end{aligned}$$

となる。したがって $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。また、 $0 \leq t \leq 1$ より $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq h \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ であり、 h と t の対応は下表のようになる。

h	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\rightarrow$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
t	0	$\rightarrow$	1

よって、求める体積は

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} S(t) dh &= \int_0^1 S(t) \frac{dh}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2} (t^2 - t + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

となる。