

問題 1

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ			
	－	8	－	4			
(2)	オ	カ					
	4	2					
(3)	キ	ク	ケ				
	1	6	8				
(4)	コ	サ					
	5	8					
(5)	シ	ス	セ	ソ			
	2	0	4	8			
(6)	タ	チ	ツ	テ			
	1	1	1	8			
(7)	ト	ナ					
	3	0					
(8)	ニ	ヌ	ネ	ノ			
	1	1	1	6			
(9)	ハ	ヒ	フ	ヘ			
	1	3	1	7			
(10)	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ロ
	3	7	3	2	0	5	3

【解説】

(1)

与えられた2次方程式 $x^2 - ax + a + 8 = 0$ が2つの負の実

〔解説〕

(1)

与えられた 2 次方程式 $x^2 - ax + a + 8 = 0$ が 2 つの負の実数解をもつということは、放物線 $y = x^2 - ax + a + 8$ の軸が y 軸より左に存在し、頂点の y 座標が負であり、 y 切片が正である
ことと同値である。したがって、 $x^2 - ax + a + 8 = \left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 + a + 8$ より、

$$\frac{1}{2}a < 0 \text{ かつ } -\frac{1}{4}a^2 + a + 8 < 0 \text{ かつ } a + 8 > 0$$

$$\Leftrightarrow a < 0 \text{ かつ } -\frac{1}{4}(a+4)(a-8) < 0 \text{ かつ } a > -8$$

$$\therefore -8 < a < -4$$

となり、 a の値の範囲は $-8 < a < -4$ である。

(2)

四角形 ABCD が円に内接していることから、 $\angle ABC + \angle ADC = \pi$ が成立する。ここで、 $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ に対して余弦定理を用いると、

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC$$

が成立する。 $\angle ABC + \angle ADC = \pi$ を用いつつ、2 式から AC^2 を消去すると、

$$AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC$$

$$\Leftrightarrow 1 + 64 - 16 \cos \angle ABC = 81 + 144 - 216 \cos (\pi - \angle ADC)$$

$$\Leftrightarrow 65 - 16 \cos \angle ABC = 225 + 216 \cos \angle ABC$$

$$\Leftrightarrow 232 \cos \angle ABC = -160$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle ABC = -\frac{20}{29}$$

となる。ここで、 $0 < \angle ABC < \pi$ であるため、

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \frac{21}{29}$$

である。以上より、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \sin \angle ABC + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 \cdot \sin \angle ADC$$

$$= 4 \sin \angle ABC + 54 \sin (\pi - \angle ABC)$$

$$= 58 \sin \angle ABC$$

$$= 42$$

である。

(3)

1000 の位の数字で場合分けして考える。

[1]1000 の位が 3 の場合

3600 より大きく、1000 の位が 3 となるのは、100 の位が 6 の場合のみである。ここで、1000 および 100 の位が 3, 6 のとき、奇数となる 4 桁の整数を考えると、1 の位が 1 か 5 のどちらかであり、10 の位が残った数字のときである。したがって、 $2 \times 4 = 8$ 個存在する。

[2]1000 の位が 4 の場合

1000 の位が 4 のとき、奇数となる 4 桁の整数を考えると、1 の位が 1, 3, 5 のいずれかであり、100 および 10 の位が残った数字のときである。したがって、 $3 \times 5 \times 4 = 60$ 個存在する。

[3]1000 の位が 5 の場合

1000 の位が 5 のとき、奇数となる 4 桁の整数を考えると、1 の位が 1 か 3 のどちらかであり、100 および 10 の位が残った数字のときである。したがって、 $2 \times 5 \times 4 = 40$ 個存在する。

[4]1000 の位が 6 の場合

[2]と同様に考えて、60 個存在する。

以上[1], [2], [3], [4]より、3600 より大きい奇数は、 $8 + 60 + 40 + 60 = 168$ 個存在する。

(4)

まず、与えられた不定方程式 $5x + 7y = 2017$ の整数解を考える。整数解の 1 つとして、 $(x, y) = (402, 1)$ を得ることができる。ここで、不定方程式から $5 \cdot 402 + 7 \cdot 1 = 2017$ の辺々を引いて、 $5(x - 402) + 7(y - 1) = 0$ が得られる。 x, y は整数であり、5, 7 は互いに素であることから、整数 k を用いて、

$$\begin{cases} x = 402 - 7k \\ y = 1 + 5k \end{cases}$$

と表すことができる。これが不定方程式の整数解である。このうち x, y が自然数であるものを考えると、

$$x > 0 \Leftrightarrow k < 57.4 \cdots$$

$$y > 0 \Leftrightarrow k > -0.2$$

であることから、 $(x, y) = (402 - 7k, 1 + 5k) \ (k = 0, 1, 2, \cdots, 57)$ である。したがって、不定方程式を満たす自然数の組 (x, y) は 58 組ある。

(5)

まず、問題文より $z \neq 0$ であるから、

$$z + \frac{4}{z} = 2$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{3}$$

より、

$$z = 2 \left\{ \cos \left(\pm \frac{1}{3} \pi \right) + i \sin \left(\pm \frac{1}{3} \pi \right) \right\} \quad (\text{複号同順})$$

である。このとき、ド・モアブルの定理より、

$$z^{11} = 2^{11} \left\{ \cos \left(\pm \frac{11}{3} \pi \right) + i \sin \left(\pm \frac{11}{3} \pi \right) \right\}$$

$$\left(\frac{4}{z} \right)^{11} = 2^{11} \left\{ \cos \left(\mp \frac{11}{3} \pi \right) + i \sin \left(\mp \frac{11}{3} \pi \right) \right\}$$

となるため、

$$z^{11} + \left(\frac{4}{z} \right)^{11} = 2^{11} \left\{ \cos \left(\pm \frac{11}{3} \pi \right) + i \sin \left(\pm \frac{11}{3} \pi \right) \right\} + 2^{11} \left\{ \cos \left(\mp \frac{11}{3} \pi \right) + i \sin \left(\mp \frac{11}{3} \pi \right) \right\}$$

$$= 2^{11} \cdot 2 \cos \left(\frac{11}{3} \pi \right)$$

$$= 2048$$

である。

(6)

$$\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) \text{ であることを用いると、}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

となる。この結果を用いると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+3)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{11}{18}$$

となる。

(7)

正 20 面体は正三角形 20 枚からなる正多面体である。1 つの辺はいずれも、2 つの正三角形の辺をなしているため、辺の数は $20 \times 3 \div 2 = 30$ である。

(8)

全ての面が合同であることから、 $OA = BC = 4, OB = AC = 5, OC = AB = 6$ となる。ここで、 $\triangle OAB$ において余弦定理を用いると、

$$OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \angle AOB = AB^2$$

$$\Leftrightarrow 16 + 25 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 36$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{5}{2}$$

となる。同様に、 $\triangle OAC$ において余弦定理を用いると、

$$OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cos \angle AOC = AC^2$$

$$\Leftrightarrow 16 + 36 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 25$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OC} = \frac{27}{2}$$

となる。以上より、

$$\overline{OA} \cdot \overline{BC} = \overline{OA} \cdot (\overline{OC} - \overline{OB})$$

$$= \overline{OA} \cdot \overline{OC} - \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{5}{2}$$

$$= 11$$

である。したがって、

$$\cos \theta = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{BC}}{\overline{OA} \cdot \overline{BC}} = \frac{11}{16}$$

となる。

(9)

曲線 $y = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 + 7x + 18$ と異なる 2 点で接する直線は、明らかに y 軸に平行ではない。したがって、その直線の方程式を $y = \alpha x + b$ 、接点の x 座標を α, β とする。このとき、

$$(4x^4 - 12x^3 + 13x^2 + 7x + 18) - (\alpha x + b) = 4(x - \alpha)^2(x - \beta)^2$$

が常に成立する。辺々整理すると、

$$(\text{左辺}) = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 + (7 - \alpha)x + (18 - b)$$

$$(\text{右辺}) = 4x^4 - 8(\alpha + \beta)x^3 + 4(\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)x^2 - 8\alpha\beta(\alpha + \beta)x + 4\alpha^2\beta^2$$

である。これは x に関する恒等式であるため、係数を比較して、

$$\begin{cases} -12 = -8(\alpha + \beta) \\ 13 = 4(\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2) \\ 7 - \alpha = -8\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ 18 - b = 4\alpha^2\beta^2 \end{cases}$$

が成立する。この第 1 式より、 $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$ となり、第 2 式から $13 = 4\{(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta\} \Leftrightarrow \alpha\beta = \frac{1}{2}$

を得る。さらに第 3, 4 式より $a = 13, b = 17$ となる。したがって、曲線

$$y = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 + 7x + 18 \text{ と異なる 2 点で接する直線の方程式は } y = 13x + 17 \text{ である。}$$

(10)

第 k 群を $1, 2, 3, \cdots, k, k+1, k, k-1, \cdots, 4, 3, 2$ とする。このとき、与えられた数列は第 1 群から順に左からならべたものと等しくなる。ここで、第 k 群に含まれる項の個数は $2k$ であるため、第 1 群から第 n 群に含まれる項の個数は、

$$\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

である。また、 $44 \cdot 45 = 1980 < 2017 < 2070 = 45 \cdot 46$ であることを踏まえると、数列の第 2017 項は第 45 群の $2017 - 1980 = 37$ 番目の項であることがわかる。したがって、第 2017 項は 37 である。また、第 k 群に含まれる項の総和は、

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) + k + (k-1) + \cdots + 4 + 3 + 2$$

$$= \{1 + 2 + \cdots + k + (k+1)\} + \{k + (k-1) + \cdots + 4 + 3 + 2\}$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) + \frac{1}{2}(k-1)(k+2)$$

$$= k(k+2)$$

であるため、第 1 群から第 44 群に含まれる項の総和は、

$$\sum_{k=1}^{44} k(k+2) = \frac{1}{6} \cdot 44 \cdot 45 \cdot 89 + 44 \cdot 45 = 31350$$

である。また、第 45 群の 1 番目から 37 番目の項の和は、

$$1 + 2 + \cdots + 36 + 37 = 703$$

である。以上より、初項から第 2017 項までの和は、

$$31350 + 703 = 32053$$

である。

問題 2

(1)

x, y をそれぞれ t で微分して,

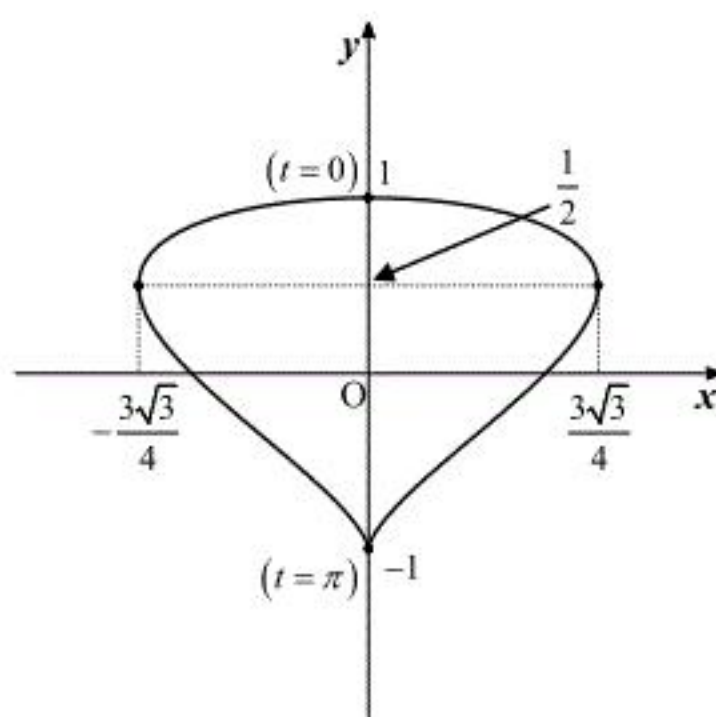
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \cos t + \cos 2t \\ &= \cos t + (2\cos^2 t - 1) \\ &= (2\cos t - 1)(\cos t + 1)\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sin t$$

である。ここで、増減表を書くと以下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{3}\pi$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
$\frac{dx}{dt}$		+	0	-	0	-	0	+	
x	0	$\rightarrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\leftarrow$	0	$\leftarrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\rightarrow$	0
$\frac{dy}{dt}$	0	-		-	0	+		+	0
y	1	$\downarrow$	$\frac{1}{2}$	$\downarrow$	-1	$\uparrow$	$\frac{1}{2}$	$\uparrow$	1
(x, y)	(0, 1)	$\searrow$	$\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$	$\swarrow$	(0, -1)	$\nwarrow$	$\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	(0, 1)

したがって、 C の概形は以下のようになる。



(答) $\frac{dx}{dt} = (2\cos t - 1)(\cos t + 1)$, $\frac{dy}{dt} = -\sin t$, C の概形：前図

(2)

(1)で図示した概形より、 C は y 軸に関して対称である。したがって、 C で囲まれた図形の面積を S とすると,

$$\begin{aligned}S &= 2 \int_{-1}^1 x dy \\ &= 2 \int_{\pi}^0 x \frac{dy}{dt} dt \\ &= 2 \int_{\pi}^0 \left(\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \cdot (-\sin t) dt \\ &= \int_0^{\pi} (2 \sin^2 t + \sin t \sin 2t) dt \\ &= \int_0^{\pi} \left\{ (1 - \cos 2t) + 2 \sin^2 t \cos t \right\} dt \\ &= \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{2}{3} \sin^3 t \right]_0^{\pi} \\ &= \pi\end{aligned}$$

である。

(答) π

問題 3

(1)

計算すると,

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{5}+11}{2}} \times \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}} \\ &= \sqrt[5]{\frac{(5\sqrt{5}+11)(5\sqrt{5}-11)}{4}} \\ &= \sqrt[5]{\frac{125-121}{4}} \\ &= 1\end{aligned}$$

である。

(答) 1

(2)

$\alpha \neq 0$ より, (1)の結果から $\beta = \frac{1}{\alpha}$ となる。したがって,

$$\begin{aligned}\alpha - \beta - 1 &= \alpha - \frac{1}{\alpha} - 1 \\ &= \frac{1}{\alpha}(\alpha^2 - \alpha - 1) \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\alpha - \frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\alpha - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。ここで, $\alpha > 0$ より, $\frac{1}{\alpha}\left(\alpha - \frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right) > 0$ である。したがって, $\alpha - \beta - 1$ と 0 の大小関

係は, α と $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ の大小関係と一致する。ここで,

$$\begin{aligned}\alpha^5 &= \frac{5\sqrt{5}+11}{2} \\ \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^5 &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \left\{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2\right\}^2 \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{5}+7}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{5}+11}{2}\end{aligned}$$

であることから, $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ である。したがって, $\alpha - \beta - 1 = 0$ である。

(答) 0