

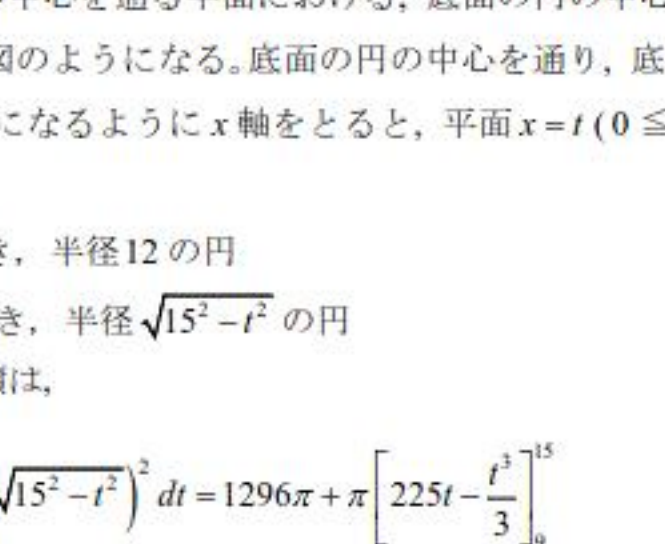
問題 1

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	1	7	6	4
(2)	オ	カ	キ	ク
	1	6	2	5
(3)	ケ	コ	サ	シ
	1	7	1	8
(4)	ス	セ		
	0	8		
(5)	ソ	タ		
	0	4		
(6)	チ	ツ	テ	ト
	1	3	2	5
(7)	ナ	ニ		
	0	7		
(8)	ヌ	ネ		
	1	6		
(9)	ノ	ハ		
	2	1		
(10)	ヒ	フ		
	2	9		

【解説】

(1)



底面の円に垂直で、円の中心を通る平面における、底面の円の中心から距離が15以下である

ような部分の断面は上図ようになる。底面の円の中心を通り、底面に垂直で、反対側の円柱

の円の中心の座標が15になるように x 軸をとると、平面 $x=t$ ($0 \leq t \leq 15$) における立体の断

面は、

$0 \leq t \leq 9$ のとき、半径12の円

$9 \leq t \leq 15$ のとき、半径 $\sqrt{15^2 - t^2}$ の円

であるから、求める体積は、

$$\begin{aligned} \pi \cdot 12^2 \cdot 9 + \int_9^{15} \pi \left(\sqrt{15^2 - t^2} \right)^2 dt &= 1296\pi + \pi \left[225t - \frac{t^3}{3} \right]_9^{15} \\ &= 1296\pi + \left(225 \cdot 15 - \frac{15^3}{3} \right) \pi - \left(225 \cdot 9 - \frac{9^3}{3} \right) \pi \\ &= 1296\pi + 2250\pi - 1782\pi \\ &= 1764\pi \end{aligned}$$

である。

(2)

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \end{aligned}$$

であり、 $e^{\log 2} = 2$ であるから、

$$\begin{aligned} f'(\log 2) &= \frac{4}{\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{16}{25} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ が収束し、また、 $x \rightarrow 5$ において、 $x-5 \rightarrow 0$ であるから、

$$\sqrt{ax-4-9} \rightarrow 0$$

すなわち、

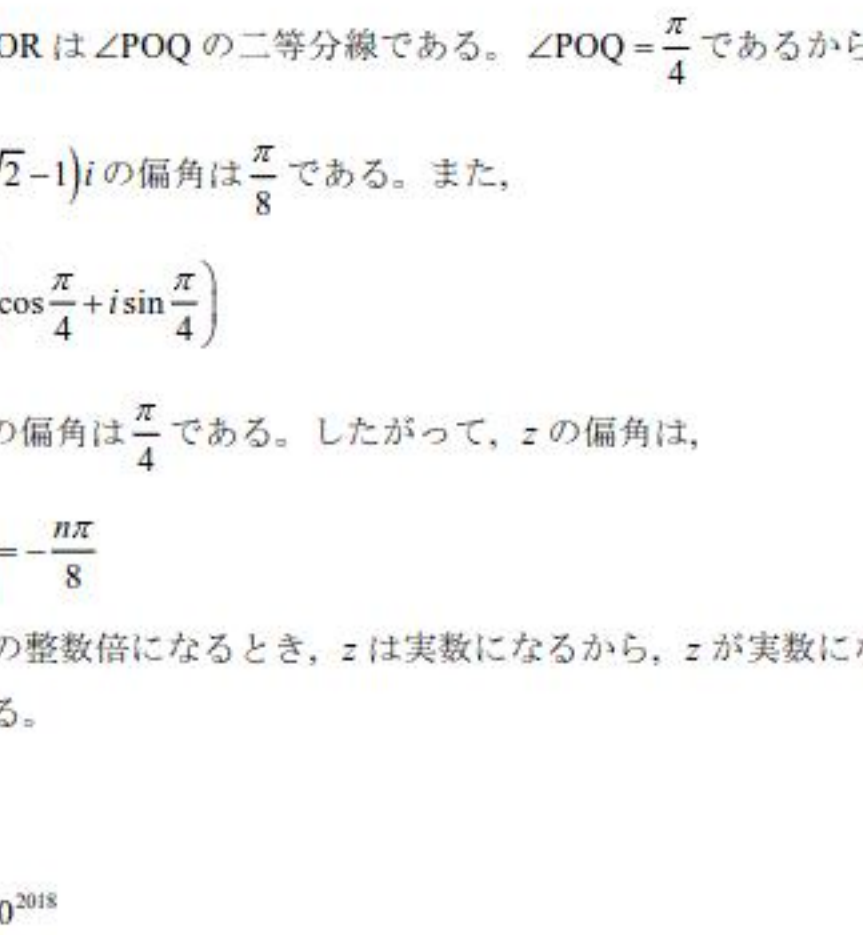
$$\begin{aligned} \sqrt{5a-4-9} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{5a-4} &= 9 \\ \Leftrightarrow 5a-4 &= 81 \\ \Leftrightarrow a &= 17 \end{aligned}$$

が必要である。このとき、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{17x-4-9}}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{17x-4-9})(\sqrt{17x-4+9})}{(x-5)(\sqrt{17x-4+9})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{17x-85}{(x-5)(\sqrt{17x-4+9})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{17}{\sqrt{17x-4+9}} \\ &= \frac{17}{18} \end{aligned}$$

となり、たしかに $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ は収束し、極限値は $\frac{17}{18}$ である。

(4)



上の図において、

$$\begin{aligned} \frac{OP}{OQ} &= \sqrt{2} \\ \frac{PR}{RQ} &= \frac{1 - (\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

より、

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{PR}{RQ}$$

であるから、直線 OR は $\angle POQ$ の二等分線である。 $\angle POQ = \frac{\pi}{4}$ であるから、 $\angle ROQ = \frac{\pi}{8}$ であ

る。ゆえに、 $1 + (\sqrt{2} - 1)i$ の偏角は $\frac{\pi}{8}$ である。また、

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

であるから、 $1 + i$ の偏角は $\frac{\pi}{4}$ である。したがって、 z の偏角は、

$$n \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{n\pi}{8}$$

である。これが π の整数倍になるとき、 z は実数になるから、 z が実数になるような最小の正

の整数 n は 8 である。

(5)

$$\begin{aligned} 2018^{2018} &= 0^{2018} \\ &= 0 \pmod{2} \\ 2018^{2018} &\equiv (-1)^{2018} \\ &= 1 \pmod{3} \\ 2018^{2018} &\equiv (-2)^{2018} \\ &= 4^{1009} \\ &\equiv (-1)^{1009} \\ &= -1 \\ &\equiv 4 \pmod{5} \end{aligned}$$

であり、 $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ であるから、これらより 2018^{2018} を 30 で割った余りが一意に定まり、そ

の値は 4 であるとわかる。

(6)

$AB = AC = a$ とおく。

$$\overline{AD} = \frac{4\overline{AB} + \overline{AC}}{5}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\overline{AD}|^2 &= \frac{|4\overline{AB} + \overline{AC}|^2}{25} \\ &= \frac{16|\overline{AB}|^2 + 8\overline{AB} \cdot \overline{AC} + |\overline{AC}|^2}{25} \\ &= \frac{16a^2 + 8a^2 \cos 120^\circ + a^2}{25} \\ &= \frac{13}{25} a^2 \end{aligned}$$

となる。1 辺が AD の長さの正三角形の面積は、

$$\frac{\sqrt{3}}{4} |\overline{AD}|^2 = \frac{13\sqrt{3}}{100} a^2$$

であり、三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

であるから、求める値は

$$\frac{\frac{13\sqrt{3}}{100} a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{13}{25}$$

となる。

(7)

OA, OP を 2 辺とする平行四辺形の面積は、

$$|35m - 14n| = 7|5m - 2n|$$

である。 $|5m - 2n|$ は負でない整数値をとる。3 点 O, A, P は同一直線上にないから、 $5m - 2n \neq 0$

である。したがって、 $7|5m - 2n|$ がとりうる最小の値は 7 であり、たしかに $m = 1, n = 2$ のとき

$7|5m - 2n| = 7$ となる。したがって、求める最小値は 7 である。

(8)

$a_n \geq 9$ であると仮定すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{30a_n - 32}{a_n + 12} \\ &= 30 - \frac{392}{a_n + 12} \\ &\geq 30 - \frac{392}{9 + 12} \\ &= \frac{238}{21} \\ &> 9 \end{aligned}$$

が成り立つ。これと $a_1 = 9$ から、数学的帰納法により、すべての自然数 n に対し、 $a_n \geq 9$ が成

り立つ。これより、

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - 16| &= \left| \frac{30a_n - 32}{a_n + 12} - 16 \right| \\ &= \left| \frac{30a_n - 32 - 16(a_n + 12)}{a_n + 12} \right| \\ &= \frac{14|a_n - 16|}{a_n + 12} \\ &\leq \frac{14}{9 + 12} |a_n - 16| \\ &\leq \frac{2}{3} |a_n - 16| \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$0 \leq |a_n - 16| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} |a_1 - 16|$$

であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} |a_1 - 16| = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 16| = 0$$

を得る。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 16$$

である。

(9)

[1] $c = 1$ のとき

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 35 \text{ より、} \\ (a, b) &= (1, 11), (4, 9), (7, 7), (10, 5), (13, 3), (16, 1) \end{aligned}$$

である。

[2] $c = 2$ のとき

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 30 \text{ より、} \\ (a, b) &= (3, 8), (6, 6), (9, 4), (12, 2) \end{aligned}$$

である。

[3] $c = 3$ のとき

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 25 \text{ より、} \\ (a, b) &= (2, 7), (5, 5), (8, 3), (11, 1) \end{aligned}$$

である。

[4] $c = 4$ のとき

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 20 \text{ より、} \\ (a, b) &= (1, 6), (4, 4), (7, 2) \end{aligned}$$

である。

[5] $c = 5$ のとき

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 15 \text{ より、} \\ (a, b) &= (3, 3), (6, 1) \end{aligned}$$

である。

[6] $c = 6$ のとき

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 10 \text{ より、} \\ (a, b) &= (2, 2) \end{aligned}$$

である。

[7] $c = 7$ のとき

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 5 \text{ より、} \\ (a, b) &= (1, 1) \end{aligned}$$

である。

[8] $c \geq 8$ のとき

$$2a + 3b \leq 0 \text{ となり、不適である。}$$

以上より、21 個である。

(10)

10 名の試験 A での正答数を $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 、試験 B での正答数を $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ とおく。二つの

試験の正答数の共分散が 2.7 であるから、

$$\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (a_i - 5.5)(b_i - 5) = 2.7$$

である。また、試験 A の得点の平均点は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (10a_i - 5) &= 10 \cdot \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} a_i - 5 \\ &= 10 \cdot 5.5 - 5 \\ &= 50 \end{aligned}$$

であり、試験 B の得点の平均点は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (11b_i - 7) &= 11 \cdot \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} b_i - 7 \\ &= 11 \cdot 5 - 7 \\ &= 48 \end{aligned}$$

であるから、二つの試験の得点の共分散は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \{ (10a_i - 5) - 50 \} \{ (11b_i - 7) - 48 \} &= 10 \cdot 11 \cdot \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (a_i - 5.5)(b_i - 5) \\ &= 110 \cdot 2.7 \\ &= 297 \end{aligned}$$

である。

問題 2

(1)

$\alpha = \frac{\pi}{180}$ とおく。3 倍角の公式を用いることで、

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{60} &= \cos 3\alpha \\ &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \\ &= 4x^3 - 3x\end{aligned}$$

を得る。

(答) $4x^3 - 3x$

(2)

任意の正の整数 n に対し、 $\cos n\alpha$ が整数係数の x の n 次式で表されることを、 n についての数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\cos \alpha = x$$

であるから、 $\cos \alpha$ は整数係数の x の 1 次式で表される。

[2] $n=2$ のとき

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 \\ &= 2x^2 - 1\end{aligned}$$

であるから、 $\cos 2\alpha$ は整数係数の x の 2 次式で表される。

[3] $n=k$ および $n=k+1$ のとき、 $\cos n\alpha$ が整数係数の x の n 次式で表されると仮定する。

このとき、 x の k 次式 $f(x)$ と x の $k+1$ 次式 $g(x)$ が存在して、

$$\begin{aligned}\cos k\alpha &= f(x) \\ \cos (k+1)\alpha &= g(x)\end{aligned}$$

が成り立つ。積和公式より、

$$\cos (k+1)\alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \{ \cos (k+2)\alpha + \cos k\alpha \}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\cos (k+2)\alpha &= 2\cos (k+1)\alpha \cos \alpha - \cos k\alpha \\ &= 2x \cdot g(x) - f(x)\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $\cos (k+2)\alpha$ は、整数係数の x の $k+2$ 次式 $2x \cdot g(x) - f(x)$ によって表せる。

[1]から[3]より、任意の正の整数 n に対し、 $\cos n\alpha$ が整数係数の x の n 次式で表されることが示された。つまり、 $\cos n\alpha$ は x の n 次式で表される。

(証明終)

(3)

x が有理数であると仮定する。(2)より、

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{45\pi}{180}$$

は整数係数の x の 45 次式であらわすことができるから、有理数である。一方、 $\sqrt{2}$ が無理数であるから、

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

は無理数であり、矛盾する。したがって、 x は無理数である。

(証明終)

問題 3

(1)

直線 AP 上の任意の点 X に対し、ある実数 k を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AX} &= k \overrightarrow{AP} \\ &= k \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} kt \\ k(t^2+1) \\ -2k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と書ける。よって、点 B を球面 S の中心とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BX} &= \overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AB} \\ &= \begin{pmatrix} kt \\ k(t^2+1)-1 \\ -2k+1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

「点 X が球面 S 上の点である」

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow |\overrightarrow{BX}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (kt)^2 + \{k(t^2+1)-1\}^2 + (-2k+1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (t^4+3t^2+5)k^2 - 2(t^2+3)k + 1 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

であるから、直線 AP と球面 S が異なる 2 つの交点をもつための必要十分条件は、 k についての 2 次方程式①が異なる 2 つの実数解をもつことである。①の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (t^2+3)^2 - (t^4+3t^2+5) \\ &= 3t^2+4\end{aligned}$$

である。この値は常に正なので、 k についての 2 次方程式①は異なる 2 つの実数解をもつから、直線 AP と球面 S は異なる 2 つの交点をもつ。

(証明終)

(2)

①の異なる 2 つの実数解を k_1, k_2 とおき、

$$\overrightarrow{AQ} = k_1 \overrightarrow{AP}, \quad \overrightarrow{AR} = k_2 \overrightarrow{AP}$$

とする。解と係数の関係から

$$k_1 + k_2 = \frac{2(t^2+3)}{t^4+3t^2+5} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$k_1 k_2 = \frac{1}{t^4+3t^2+5} \quad \cdots \textcircled{2}$$

を得る。このとき、

$$\begin{aligned}l(t) &= |\overrightarrow{QR}| \\ &= |k_1 - k_2| \cdot |\overrightarrow{AP}|\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\{l(t)\}^2 &= (k_1 - k_2)^2 \{t^2 + (t^2+1)^2 + (-2)^2\} \\ &= \{(k_1 + k_2)^2 - 4k_1 k_2\} (t^4 + 3t^2 + 5) \\ &= \left\{ \frac{4(t^2+3)^2}{(t^4+3t^2+5)^2} - \frac{4}{t^4+3t^2+5} \right\} (t^4 + 3t^2 + 5) \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \\ &= \frac{4t^4 + 24t^2 + 36 - 4(t^4 + 3t^2 + 5)}{t^4 + 3t^2 + 5} \\ &= \frac{4(3t^2 + 4)}{t^4 + 3t^2 + 5}\end{aligned}$$

が成り立つ。両辺を t で微分すると、

$$\begin{aligned}2l(t)l'(t) &= \frac{4\{6t(t^4+3t^2+5) - (3t^2+4)(4t^3+6t)\}}{(t^4+3t^2+5)^2} \\ &= \frac{4(-6t^5 - 16t^3 + 6t)}{(t^4+3t^2+5)^2} \\ &= \frac{-8t(3t^2-1)(t^2+3)}{(t^4+3t^2+5)^2}\end{aligned}$$

であるから、

$$l'(t) = \frac{-4t(3t^2-1)(t^2+3)}{(t^4+3t^2+5)^2 \cdot l(t)}$$

となる。いま、

$$\begin{aligned}l'(t) &> 0 \\ \Leftrightarrow t(3t^2-1) &< 0 \quad (\because t^2+3 > 0, (t^4+3t^2+5)^2 > 0, l(t) > 0) \\ \Leftrightarrow t \left(t - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) &< 0 \\ \Leftrightarrow t &< -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 < t < \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

であるから、以下の増減表を得る。

t	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$l'(t)$	+	0	-	0	+	0	-
$l(t)$	$\nearrow$	$\frac{6}{\sqrt{11}}$	$\searrow$	$\frac{4}{\sqrt{5}}$	$\nearrow$	$\frac{6}{\sqrt{11}}$	$\searrow$

これより、 $l(t)$ は、 $t=0$ で極小値 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 、 $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ で極大値 $\frac{6}{\sqrt{11}}$ をとる。

(答) $t=0$ のとき極小値 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 、 $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極大値 $\frac{6}{\sqrt{11}}$