

問題 1

[解答]

(1)	ア	イ		
	3	2		
(2)	ウ	エ	オ	
	5	0	2	
(3)	カ	キ		
	4	6		
(4)	ク	ケ	コ	サ
	1	6	3	1
(5)	シ	ス	セ	ソ
	2	9	1	9
(6)	タ	チ	ツ	テ
	4	7	5	4
(7)	ト	ナ	ニ	
	5	3	2	
(8)	ヌ	ネ	ノ	
	4	1	9	
(9)	ハ	ヒ	フ	
	5	3	6	
(10)	ヘ	ホ		
	2	0		

[解説]

- (1)
- x の範囲で場合分けして考える。
- [1] $0 \leqq x \leqq 24$ のとき
- このとき中央値は
- $$\frac{24+49}{2} = \frac{73}{2}$$
- となる。
- [2] $25 \leqq x \leqq 54$ のとき
- このとき中央値は $\frac{x+49}{2}$ となる。 x の取りうる値は 30 通り存在するので、中央値の取りうる値は 30 通り存在する。
- [3] $x \geqq 55$ のとき
- このとき中央値は
- $$\frac{49+55}{2} = 52$$
- となる。
- 以上, [1], [2], [3] と [2] の範囲で $\frac{73}{2} \leqq \frac{x+49}{2} \leqq 52$ となり、共通の値をとることはないことから、中央値は 32 通り存在する。

(2)

1 から 2019 までの自然数のうち、5 の倍数は

$$2019 = 403 \cdot 5 + 4$$

より、403 個ある。5² の倍数は

$$403 = 80 \cdot 5 + 3$$

より、80 個ある。5³ の倍数は

$$80 = 16 \cdot 5$$

より、16 個ある。5⁴ の倍数は

$$16 = 3 \cdot 5 + 1$$

より、3 個ある。以上より、2019! は

$$403 + 80 + 16 + 3 = 502 \text{ (回)}$$

5 で割り切れる。ここで 2019 = 1009 · 2 + 1 より 2019! は素因数 2 を 1009 個以上持つ。したがって、2019! は 10 でちょうど 502 回割り切れる。よって、末尾に 502 個の 0 が並ぶ。

(3)

$x > 0$ であるから、 $4x, \frac{1}{x} > 0$ である。よって、相加平均・相乗平均の関係から、

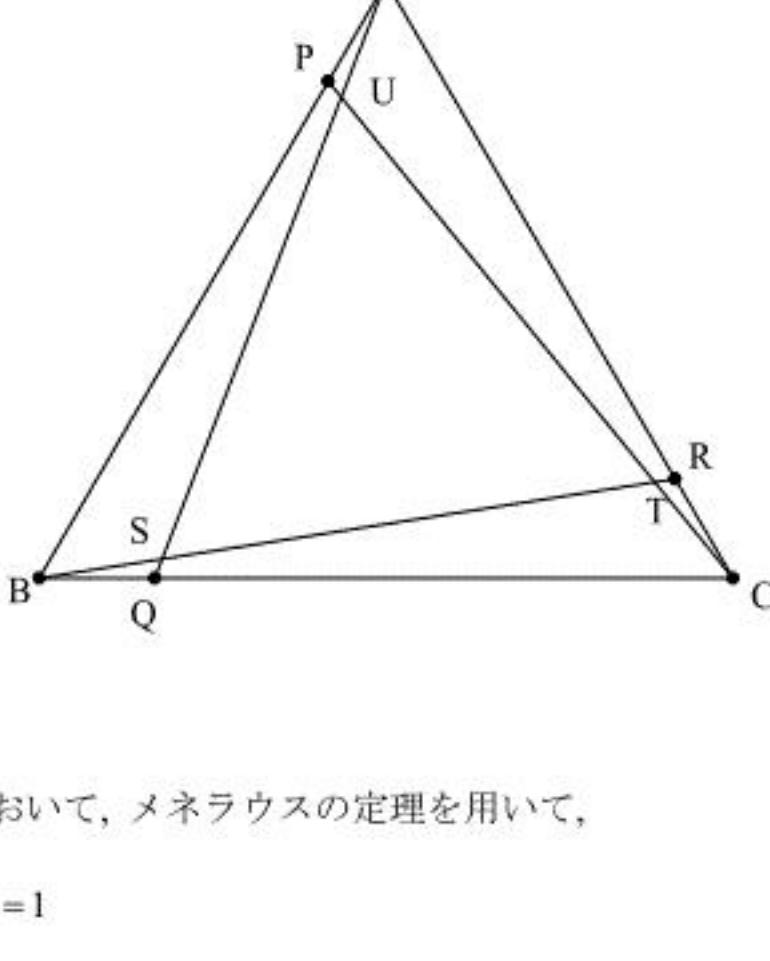
$$4x + \frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} = 4$$

となる。等号成立は $4x = \frac{1}{x}$ つまり、 $x = \frac{1}{2}$ のときである。また、 $8x^2, \frac{1}{8x^4} > 0$ である。よって、相加平均・相乗平均の関係から、

$$16x^2 + \frac{1}{8x^4} = 8x^2 + 8x^2 + \frac{1}{8x^4} \geqq 3\left(8x^2 \cdot 8x^2 \cdot \frac{1}{8x^4}\right)^{\frac{1}{3}} = 6$$

となる。等号成立は $8x^2 = \frac{1}{8x^4}$ つまり、 $x = \frac{1}{2}$ のときである。

(4)



△ABQ と直線 PC において、メネラウスの定理を用いて、

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BC}{CQ} \cdot \frac{QU}{UA} = 1$$
$$\frac{1}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{QU}{UA} = 1$$
$$\therefore \frac{QU}{UA} = \frac{25}{6}$$

となる。よって、△APU の面積は△ABC の面積の、

$$\frac{BQ}{BC} \cdot \frac{AU}{AQ} \cdot \frac{AP}{AB} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{31} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{186} \text{ (倍)}$$

となる。対称性から△APU、△BQS、△CRT の面積は等しい。△STU は△ABC から△ABQ、△BCR、△CAP を除き、△APU、△BQS、△CRT を足したものであるから、△STU の面積は△ABC の面積の

$$1 - \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{186} \cdot 3 = \frac{16}{31} \text{ (倍)}$$

となる。

(5)

さいころの目の出方は同様に確からしく $\frac{1}{6}$ である。さいころを 2 回投げた後に原点 O にいるのは、

1 の目が 1 回、2 または 3 の目が 1 回出る

4 の目が 1 回、5 または 6 の目が 1 回出る

場合のいずれかである。よって、この確率は

$${}_2C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + {}_2C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{9}$$

となる。つぎに、さいころを 4 回投げた後に原点 O に存在するのは、

1 の目が 2 回、2 または 3 の目が 2 回出る

4 の目が 2 回、5 または 6 の目が 2 回出る

1 の目が 1 回、2 または 3 の目が 1 回、4 の目が 1 回、5 または 6 の目が 1 回出る

場合のいずれかである。よって、この確率は

$${}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 + {}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 + (4!) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

となる。

(6)

曲線の方程式を微分すると、それぞれ

$$y' = 3x^2 - 2x + 2$$
$$y' = x$$

となる。ここで、共有点の x 座標を α とすると、接線が直交することから

$$\begin{aligned} (3\alpha^2 - 2\alpha + 2) \cdot \alpha &= -1 \\ 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha + 1 &= 0 \\ (3\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) &= 0 \\ \therefore \alpha &= -\frac{1}{3} \left(\because \alpha^2 - \alpha + 1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \right) \end{aligned}$$

を得る。よって、共有点の x 座標は $-\frac{1}{3}$ となる。これより、

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - k \\ \therefore k &= \frac{47}{54} \end{aligned}$$

となる。このとき、曲線の方程式を連立すると、

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 2x &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{47}{54} \\ x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{47}{54} &= 0 \\ \left(x + \frac{1}{3}\right) \left(x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{47}{18}\right) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{1}{3} \left(\because x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{47}{18} = \left(x - \frac{11}{12}\right)^2 + \frac{85}{48} > 0 \right) \end{aligned}$$

となり、確かに共有点は 1 つである。

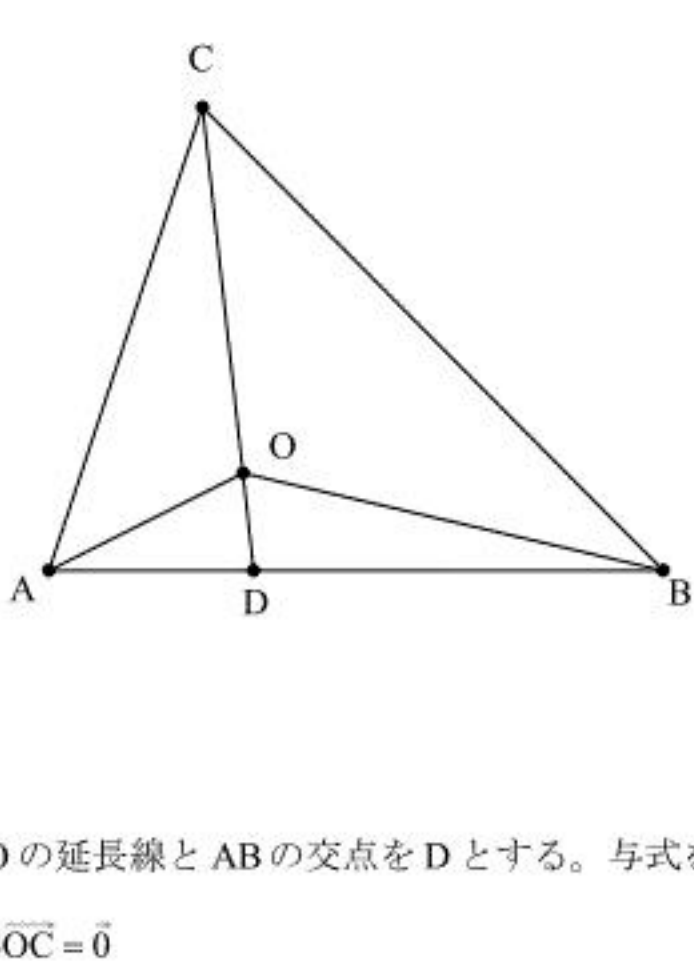
(7)

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \{ (\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 - 1 \right\} \\ &= \frac{5}{32} \end{aligned}$$

となる。

(8)



上図のように、直線 CO の延長線と AB の交点を D とする。与式を変形すると、

$$\begin{aligned} 10\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} &= \vec{0} \\ 10(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}) + 5(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}) + 4\overrightarrow{OC} &= \vec{0} \\ 19\overrightarrow{CO} &= 10\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{CO} &= \frac{15}{19} \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \right) \end{aligned}$$

となる。これより、CD : OD = 19 : 4 となり、△OAB の面積は△ABC の面積の $\frac{4}{19}$ 倍になる。

(9)

$f(x) = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$

であるから、

$$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

となる。よって、

$$f'(\log 5) = \frac{5}{(5+1)^2} = \frac{5}{36}$$

となる。

(10)

点 Q(w) は原点 O を始点とする半直線 OP 上にあるから、非負実数 k を用いて

$$w = kz$$

と表される。さらに $OP \cdot OQ = 1$ より、

$$\begin{aligned} |z||w| &= 1 \\ \Leftrightarrow k|z|^2 &= 1 \quad (\because k > 0) \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1}{zz} \quad (\because zz \neq 0) \\ \therefore w &= kz = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

となる。ここで与式を変形すると、

$$\begin{aligned} |60z - 2| &= 1 \\ \Leftrightarrow |60z - 2|^2 &= 1^2 \\ \Leftrightarrow (60z - 2)(\overline{60z - 2}) &= 1 \\ \Leftrightarrow (60z - 2)(\overline{60z} - \overline{2}) &= 1 \\ \Leftrightarrow 3600z\overline{z} - 120z - 120\overline{z} + 4 &= 1 \\ \Leftrightarrow 1200z\overline{z} - 40z - 40\overline{z} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1200 - \frac{40}{z} - \frac{40}{\overline{z}} + \frac{1}{zz} &= 0 \quad (\because z\overline{z} \neq 0) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z} - 40\right) \left(\frac{1}{\overline{z}} - 40\right) &= 400 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z} - 40\right) \left(\frac{1}{\overline{z}} - 40\right) &= 20^2 \\ \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z} - 40\right| &= 20 \\ \Leftrightarrow |w - 40| &= 20 \end{aligned}$$

となり、点 Q は半径 20 の円を描く。

問題 2

(1)

与式を変形すると、

$$\begin{aligned}x(x-2t)+y\{y-2(1-t)\}&=0 \\ \Leftrightarrow x^2+y^2-2y=2(x-y)t\end{aligned}$$

となる。よって、 $x-y$ の正負で場合分けして考える。

[1] $x-y=0$ のとき

このとき、 $x^2+y^2-2y=0$ であり、 $x=y$ から、

$$\begin{aligned}2x^2-2x&=0 \\ \Leftrightarrow 2x(x-1)&=0 \\ \therefore x&=0, 1\end{aligned}$$

となる。よって、 $(x, y)=(0, 0), (1, 1)$ で条件を満たす。

[2] $x-y>0$ のとき

$0 \leq t \leq 1$ から、

$$\begin{aligned}0 \leq x^2+y^2-2y \leq 2(x-y) \\ \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 \geq 1 \text{ かつ } (x-1)^2+y^2 \leq 1\end{aligned}$$

となる。よって、この範囲で条件を満たす。

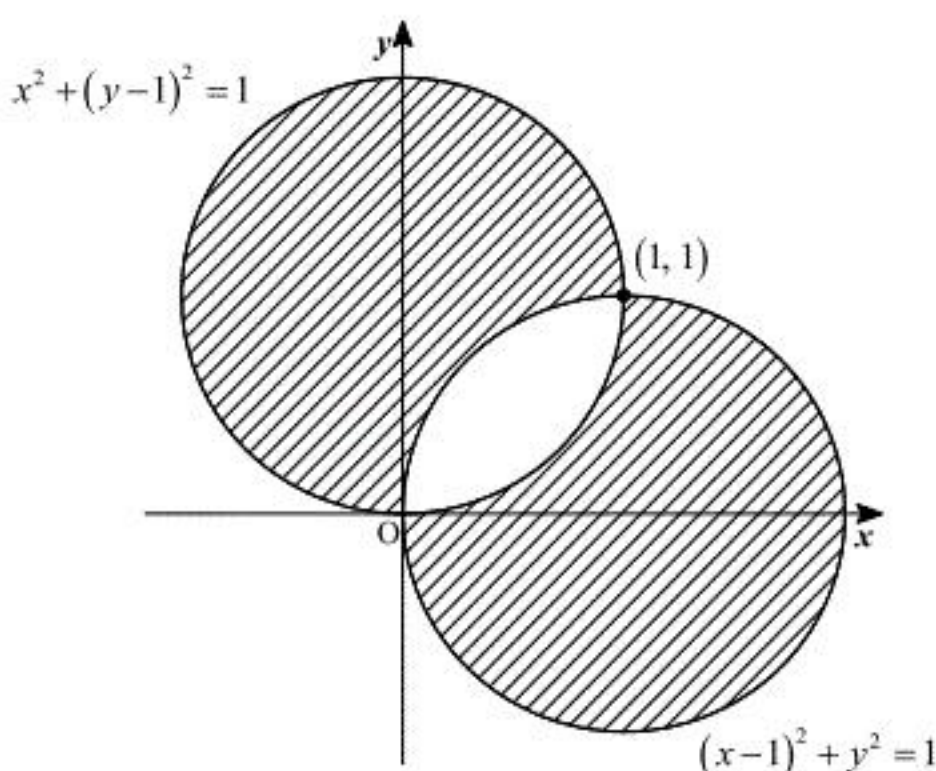
[3] $x-y<0$ のとき

$0 \leq t \leq 1$ から、

$$\begin{aligned}2(x-y) \leq x^2+y^2-2y \leq 0 \\ \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 \leq 1 \text{ かつ } (x-1)^2+y^2 \geq 1\end{aligned}$$

となる。よって、この範囲で条件を満たす。

以上, [1], [2], [3] から D の領域は下図の斜線部のようになる。ただし境界を含む。



(答) 前図

(2)

D の面積は半径1の四分円6つと、一辺の長さが1の正方形から半径1の四分円を除いたもの2つを合わせたものである。よって、

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 6 + \left\{ 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \cdot 2 = 2 + \pi$$

となる。

(答) $2 + \pi$

(3)

求める回転体の体積は、 $x^2+(y-1)^2=1$ の $y \geq 1$ における弧による回転体から、

$x^2+(y-1)^2=1$ の $y \leq 1$ 、 $x \leq 0$ における弧による回転体と $(x-1)^2+y^2=1$ の $y \geq 0$ 、 $x \leq 1$ に

おける弧による回転体を除き、 $x^2+(y-1)^2=1$ の $y \leq 1$ 、 $x \geq 0$ における弧による回転体と

$(x-1)^2+y^2=1$ の $y \geq 0$ 、 $x \geq 1$ における弧による回転体を加えたものである。ここで、

$x^2+(y-1)^2=1$ の $y \leq 1$ 、 $x \leq 0$ における弧による回転体と $x^2+(y-1)^2=1$ の $y \leq 1$ 、 $x \geq 0$ に

おける弧による回転体の体積は対称性から等しい。また、 $(x-1)^2+y^2=1$ の $y \geq 0$ 、 $x \leq 1$ に

おける弧による回転体と $(x-1)^2+y^2=1$ の $y \geq 0$ 、 $x \geq 1$ における弧による回転体の体積も対

称性より等しい。よって、求める体積は $x^2+(y-1)^2=1$ の $y \geq 1$ における弧による回転体の体

積と等しくなる。ここで、

$$\begin{aligned}x^2+(y-1)^2&=1 \\ \Leftrightarrow y&=1 \pm \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

となるので、求める体積は

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{-1}^1 \left(1 + \sqrt{1-x^2} \right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 \left\{ 2 - x^2 + 2\sqrt{1-x^2} \right\} dx \\ &= \pi \left[2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 + 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{10}{3}\pi + 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx\end{aligned}$$

となる。 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ は原点を中心とする半径1の円の $y \geq 0$ の面積に等しく、

$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ である。よって、求める体積は

$$\begin{aligned}V &= \frac{10}{3}\pi + 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{10}{3}\pi + \pi^2\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{10}{3}\pi + \pi^2$

問題 3

(1)

$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ となることを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$$S_1(1) = 1^1 = 1, \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

となるので、確かに $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ を満たす。

[2] $n=k$ のとき

$$S_1(k) = \frac{k(k+1)}{2}$$

となると仮定する。すると、

$$\begin{aligned} S_1(k+1) &= S_1(k) + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ でも $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ を満たす。

以上, [1], [2] から数学的帰納法により示された。

(証明終)

(2)

$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ となることを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$$S_2(1) = 1^2 = 1, \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$$

となるので、確かに $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を満たす。

[2] $n=k$ のとき

$$S_2(k) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{2}$$

となると仮定する。すると、

$$\begin{aligned} S_2(k+1) &= S_2(k) + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1) \left\{ \frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right\} \\ &= (k+1) \cdot \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ でも $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を満たす。

以上, [1], [2] から数学的帰納法により示された。

(証明終)

(3)

$\sum_{k=1}^n \{(k+1)^4 - k^4\}$ について考える。これは、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{(k+1)^4 - k^4\} &= \{(n+1)^4 - n^4\} + \{n^4 - (n-1)^4\} + \dots + \{2^4 - 1^4\} \\ &= (n+1)^4 - 1 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{(k+1)^4 - k^4\} &= \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} (n+1)^4 - 1 &= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{(n+1)^4 - 1 - 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1}{4} \\ &= \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n}{4} \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \\ &= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \end{aligned}$$

となる。同様に、 $\sum_{k=1}^n \{(k+1)^5 - k^5\}$ について考える。これは、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{(k+1)^5 - k^5\} &= \{(n+1)^5 - n^5\} + \{n^5 - (n-1)^5\} + \dots + \{2^5 - 1^5\} \\ &= (n+1)^5 - 1 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{(k+1)^5 - k^5\} &= \sum_{k=1}^n (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) \\ &= 5 \sum_{k=1}^n k^4 + 10 \sum_{k=1}^n k^3 + 10 \sum_{k=1}^n k^2 + 5 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} (n+1)^5 - 1 &= 5 \sum_{k=1}^n k^4 + 10 \sum_{k=1}^n k^3 + 10 \sum_{k=1}^n k^2 + 5 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ \sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{(n+1)^5 - 1 - 10 \sum_{k=1}^n k^3 - 10 \sum_{k=1}^n k^2 - 5 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1}{5} \\ &= \frac{n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - \frac{5}{2} n^2 (n+1)^2 - \frac{5}{3} n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2} n(n+1) - n}{5} \\ &= \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30} \\ &= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1) \end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \sum_{k=1}^n k^4 \\ &= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \left\{ \frac{6}{5} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{5} \right\} \\ &= S_2(n) \left\{ \frac{6}{5} S_1(n) - \frac{1}{5} \right\} \end{aligned}$$

となるので、確かに題意を満たす $a = \frac{6}{5}, b = -\frac{1}{5}$ が存在することが示された。

(証明終)