

問題 I

【解答】

(1)	<table> <tr><td>イ</td><td>ウ</td><td>エ</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>3</td></tr> </table>			イ	ウ	エ	6	4	3										
イ	ウ	エ																	
6	4	3																	
(2)																			
(3)	<table> <tr><td>オ</td><td>カ</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td></tr> </table>			オ	カ	6	4												
オ	カ																		
6	4																		
(4)																			
(5)	<table> <tr><td>キ</td></tr> <tr><td>3</td></tr> </table>			キ	3														
キ																			
3																			
(6)																			
(7)	<table> <tr><td>ク</td><td>ケ</td><td>コ</td><td>サ</td><td>シ</td><td>ス</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>			ク	ケ	コ	サ	シ	ス	3	2	2	1	1	1				
ク	ケ	コ	サ	シ	ス														
3	2	2	1	1	1														
(8)	<table> <tr><td>セ</td></tr> <tr><td>8</td></tr> </table>			セ	8														
セ																			
8																			
(9)	<table> <tr><td>ソ</td><td>タ</td><td>チ</td><td>ツ</td><td>テ</td><td>ト</td><td>ナ</td><td>ニ</td></tr> <tr><td>6</td><td>0</td><td>5</td><td>9</td><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td>0</td></tr> </table>			ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	6	0	5	9	3	0	3	0
ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ												
6	0	5	9	3	0	3	0												
(10)	<table> <tr><td>ヌ</td><td>ネ</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td></tr> </table>			ヌ	ネ	2	7												
ヌ	ネ																		
2	7																		
(11)	<table> <tr><td>ノ</td><td>ハ</td><td>ヒ</td><td>フ</td><td>ヘ</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>1</td><td>9</td><td>6</td></tr> </table>			ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	8	2	1	9	6						
ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ															
8	2	1	9	6															
(12)	<table> <tr><td>ホ</td><td>マ</td><td>ミ</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>6</td></tr> </table>			ホ	マ	ミ	5	2	6										
ホ	マ	ミ																	
5	2	6																	

解説]

x は実数の範囲を動くことから、 $e^x > 0$ となることに注意すると

$$3e^{2x} - 7e^x = 6$$

$$\Leftrightarrow (3e^x + 2)(e^x - 3) = 0$$

$$\therefore e^x = 3$$

である。したがって

$$e^{4x} = 243$$

$$\therefore x = \frac{5}{4} \ln 3$$

【解説】

(1)

x は実数の範囲を動くことから、 $e^x > 0$ となることに注意すると

$$\begin{aligned} 3e^{2x} - 7e^x &= 6 \\ \Leftrightarrow (3e^x + 2)(e^x - 3) &= 0 \\ \therefore e^x &= 3 \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} e^{4x} &= 243 \\ \Leftrightarrow 3^k &= 243 \\ \Leftrightarrow 3^k &= 3^5 \\ \therefore k &= 5 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\left| 2x - x^2 \right| = \begin{cases} 2x - x^2 & (0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ x^2 - 2x & (x < 0, x \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

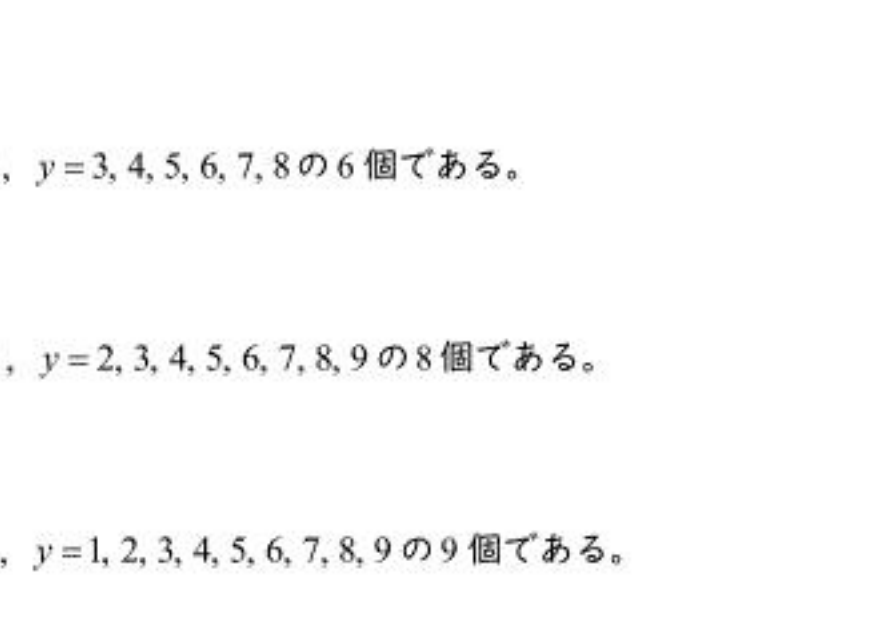
であるから

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \left(\left| 2x - x^2 \right| + x^2 + 2x + 2 \right) dx &= \int_{-2}^0 (2x^2 + 2) dx + \int_0^2 (4x + 2) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 + 2x \right]_{-2}^0 + \left[2x^2 + 2x \right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3} + 16 \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

を得る。

(3)

$1 \leq y \leq 10 - \frac{(x-5)^2}{5}$ かつ $y \geq |x-5|$ を満たす領域は次図の斜線部分である。ただし、境界を含む。



以下、斜線部の領域に含まれる格子点の個数を数え上げる。ただし、斜線部の領域は直線 $x=5$ に対して線対称であることから、 $0 \leq x \leq 5$ の範囲に含まれる格子点の個数を2倍したのち、重複して数えている直線 $x=5$ 上の格子点の個数を除けばよいことに注意する。 x を固定して各直線上の格子点の個数を数えると次の通りである。

[1] $x=0$ のとき

$y=5$ の1個である。

[2] $x=1$ のとき

$4 \leq y \leq \frac{34}{5}$ より、 $y=4, 5, 6$ の3個である。

[3] $x=2$ のとき

$3 \leq y \leq \frac{41}{5}$ より、 $y=3, 4, 5, 6, 7, 8$ の6個である。

[4] $x=3$ のとき

$2 \leq y \leq \frac{46}{5}$ より、 $y=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ の8個である。

[5] $x=4$ のとき

$1 \leq y \leq \frac{49}{5}$ より、 $y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ の9個である。

[6] $x=5$ のとき

$1 \leq y \leq 10$ より $y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ の10個である。

以上、[1], [2], [3], [4], [5], [6]より、条件を満たす整数の組 (x, y) は

$$(1+3+6+8+9+10) \times 2 - 10 = 64 \text{ (組)}$$

ある。

4)

$|z_1|=1, |z_2|=2, \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{6}$ より、点 (z_1) は複素数平面上で点 (z_2) を原点中心に距離を $\frac{1}{2}$

倍して $\frac{\pi}{6}$ だけ回転させた点である。したがって

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \end{aligned}$$

となる。よって

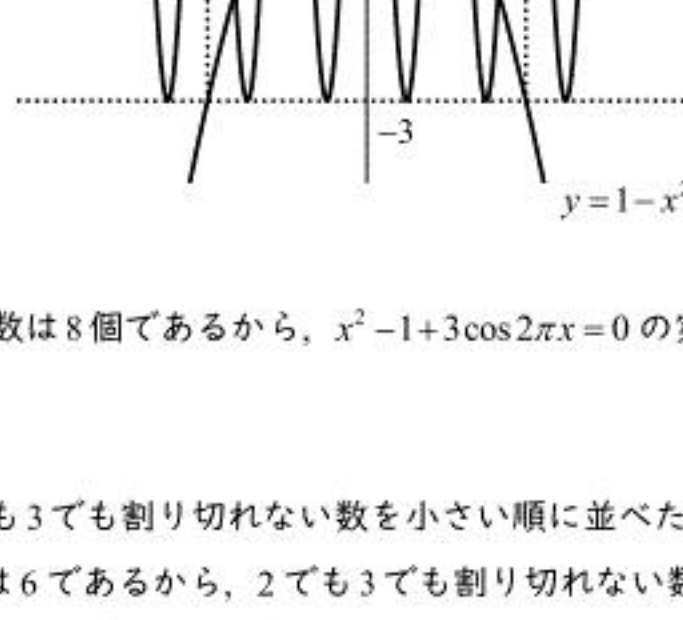
$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{|z_1 + kz_2| - |z_1|}{k} &= |z_2| \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{z_1}{z_2} + k \right| - \left| \frac{z_1}{z_2} \right|}{k} \\ &= 2 \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\left| \left(k + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{1}{4}i \right| - \left| \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \right|}{k} \\ &= 2 \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\left(k + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^2} - \frac{1}{2}}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1} - 1}{k} \end{aligned}$$

となり、右辺の分子を有理化すると

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1} - 1 \right) \left(\sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1} + 1 \right)}{k \left(\sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1} + 1 \right)} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{4k^2 + 2\sqrt{3}k}{k \left(\sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1} + 1 \right)} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{4k + 2\sqrt{3}}{\sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1} + 1} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

を得る。

(5)



$\angle ABC = \theta$ とおくと、 $\triangle ABC$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \theta \\ \Leftrightarrow 9 &= 4 + 16 - 16 \cos \theta \\ \therefore \cos \theta &= \frac{11}{16} \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $AH \perp BC$ より

$$\begin{aligned} BH &= AB \cos \theta \\ &= \frac{11}{8} \end{aligned}$$

となり、点 H は線分 BC 上の点であるから

$$\begin{aligned} CH &= BC - BH \\ &= \frac{21}{8} \end{aligned}$$

となる。よって、 $BH : CH = 11 : 21$ であり

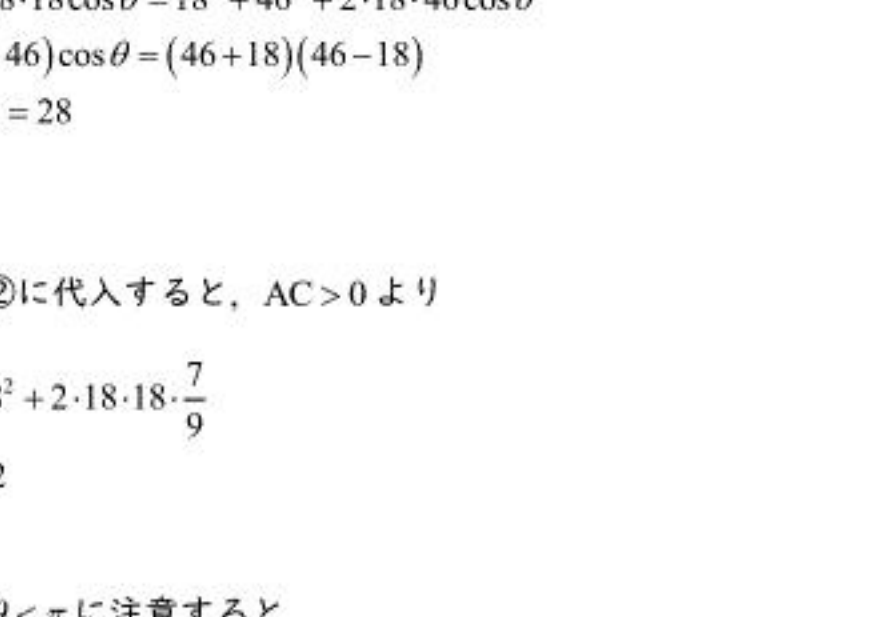
$$\overline{AH} = \frac{21\overline{AB} + 11\overline{AC}}{11 + 21} = \frac{1}{32} (21\overline{AB} + 11\overline{AC})$$

が得られる。

(6)

$$\begin{aligned} x^2 - 1 + 3 \cos 2\pi x &= 0 \\ \Leftrightarrow 3 \cos 2\pi x &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

であるから、 $x^2 - 1 + 3 \cos 2\pi x = 0$ の実数解は、 $y = 3 \cos 2\pi x$ と $y = 1 - x^2$ の共有点の x 座標に等しい。そこで、曲線 $y = 3 \cos 2\pi x$ および曲線 $y = 1 - x^2$ の概形を図示すると次のようになる。



上図より共有点の個数は8個であるから、 $x^2 - 1 + 3 \cos 2\pi x = 0$ の実数解の個数は8である。

(7)

正の整数のうち2でも3でも割り切れない数を小さい順に並べた数列を $\{c_n\}$ とする。いま、2と3の最小公倍数は6であるから、2でも3でも割り切れない数は6で割って1余る数または6で割って5余る数のいずれかに分類される。前者を小さい順に並べた数列を $\{a_n\}$ 、後者を小さい順に並べた数列を $\{b_n\}$ とすると

$$\begin{aligned} a_n &= 6n - 5 \quad (n = 1, 2, \dots) \\ b_n &= 6n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

と一般項は表せる。ここで、任意の正の整数 k に対して $a_k < b_k < a_{k+1}$ となることに注意すると、 $\{c_n\}$ は $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ と $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ の各項を交互に並べたものとなるため

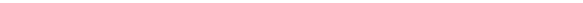
$$\begin{aligned} c_{2020} &= b_{1010} \\ &= 6 \cdot 1010 - 1 \\ &= 6059 \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} \frac{S}{2020} &= \frac{1}{2020} \sum_{k=1}^{1010} (a_k + b_k) \\ &= \frac{1}{2020} \sum_{k=1}^{1010} (12k - 6) \\ &= \frac{1}{2020} \left\{ 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1010 \cdot (1010 + 1) - 6 \cdot 1010 \right\} \\ &= 3 \cdot 1011 - 3 \\ &= 3030 \end{aligned}$$

となる。

(8)



$\angle ABC = \theta$ 、求める円の半径を R とおく。このとき、 $\triangle ABC$ において正弦定理より

$$\frac{AC}{\sin \theta} = 2R \quad \dots \textcircled{1}$$

である。いま、 $\triangle ABC$ において余弦定理より

$$AC^2 = 18^2 + 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 18 \cos \theta \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、四角形 $ABCD$ が円に内接していることから

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle ADC &= \pi \\ \Leftrightarrow \angle ADC &= \pi - \theta \end{aligned}$$

であることに注意すると、 $\triangle ADC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= 18^2 + 46^2 - 2 \cdot 18 \cdot 46 \cos (\pi - \theta) \\ &= 18^2 + 46^2 + 2 \cdot 18 \cdot 46 \cos \theta \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より

$$\begin{aligned} 18^2 + 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 18 \cos \theta &= 18^2 + 46^2 + 2 \cdot 18 \cdot 46 \cos \theta \\ \Leftrightarrow -2 \cdot 18 (18 + 46) \cos \theta &= (46 + 18) (46 - 18) \\ \Leftrightarrow -2 \cdot 18 \cos \theta &= 28 \\ \therefore \cos \theta &= -\frac{7}{9} \end{aligned}$$

を得る。この結果を $\textcircled{2}$ に代入すると、 $AC > 0$ より

$$\begin{aligned} AC^2 &= 18^2 + 18^2 + 2 \cdot 18 \cdot 18 \cdot \frac{7}{9} \\ \Leftrightarrow AC^2 &= 1152 \\ \therefore AC &= 24\sqrt{2} \end{aligned}$$

であり、さらに、 $0 < \theta < \pi$ に注意すると

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= 1 - \left(-\frac{7}{9} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \theta &= \frac{32}{81} \\ \therefore \sin \theta &= \frac{4\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

である。これらを $\textcircled{1}$ に代入して

$$\begin{aligned} \frac{24\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{2}}{9}} &= 2R \\ \Leftrightarrow R &= 27 \end{aligned}$$

が得られる。

(9)

100 人のテストの得点の修正後の合計を S とする。修正前の平均は80であり、2名のデータが100から0になってしまっていたことから

$$\begin{aligned} S &= 80 \cdot 100 + 100 \cdot 2 \\ &= 8200 \end{aligned}$$

である。よって、修正後の平均は

$$\frac{S}{100} = 82$$

となる。次に、100 人のテストの得点の2乗の修正前の合計を T とすると、修正前の平均は80、分散は320であるから、

$$\begin{aligned} \frac{T}{100} - 80^2 &= 320 \\ \Leftrightarrow T &= 672000 \end{aligned}$$

となる。よって、100 人のテストの得点の2乗の修正後の合計を T' とすると

$$\begin{aligned} T' &= 672000 + 100^2 \cdot 2 \\ &= 692000 \end{aligned}$$

を得る。したがって、修正後の分散は

$$\frac{T'}{100} - 82^2 = 196$$

となる。

(10)

十進法で計算をしたのち、九進法に変換すれば

$$\begin{aligned} 51.3_{(6)} + 24.1_{(6)} &= (5 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0 + 3 \cdot 6^{-1}) + (2 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0 + 1 \cdot 6^{-1}) \\ &= 47 + \frac{2}{3} \\ &= 5 \cdot 9^1 + 2 \cdot 9^0 + 6 \cdot 9^{-1} \\ &= 52.6_{(9)} \end{aligned}$$

となる。

問題 2

(1)

以下、赤玉を R、白玉を W と表記する。また、たとえば、1 回目の試行で赤玉、2 回目の試行で白玉が取り出される事象を (R, W) のように書く。このとき、2 回目の試行後、袋の外に白玉が 3 個あるための条件は (R, R) となることであるから、求める確率は

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{5}$$

となる。

(答) $\frac{1}{5}$

(2)

3 回目の試行で白玉が取り出されるとき、考えられる取り出し方は

$$(R, R, W), (R, W, W), (W, R, W), (W, W, W)$$

の 4 通りである。ここで、袋の玉の総数は 1 回の試行ごとに 1 個増えていくことから、取り出す玉の組み合わせが同じであれば、どのような順番で玉を取り出しても最終的な確率は等しくなる。これより、各事象が起こる確率を求めると次の通りである。

[1] (R, R, W) のとき

このようになる確率は

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{35}$$

である。

[2] (R, W, W) のとき

このようになる確率は

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{35}$$

であり、これは (W, R, W) のときも同様である。

[3] (W, W, W) のとき

このようになる確率は

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{35}$$

である。

以上、[1], [2], [3] より、各取り出し方が互いに排反であることから、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{3}{35} + \frac{4}{35} \cdot 2 + \frac{10}{35} &= \frac{21}{35} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3}{5}$

(3)

赤玉が白玉より先になくなるような取り出し方は

$$(R, R), (R, W, R), (R, W, W, R), (W, R, R), (W, R, W, R), (W, W, R, R)$$

の 6 通りである。(2) と同様、取り出す順番が異なるだけであれば、最終的な確率は変化しないことに注意して、各事象が起こる確率を求めると次の通りである。

[1] (R, R) のとき

(1) の結果より、このようになる確率は $\frac{1}{5}$ である。

[2] (R, W, R) のとき

(2) の結果より、このようになる確率は $\frac{3}{35}$ であり、これは (W, R, R) のときも同様である。

[3] (R, W, W, R) のとき

このようになる確率は

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{70}$$

であり、これは (W, R, W, R), (W, W, R, R) のときも同様である。

以上、[1], [2], [3] より、各取り出し方が互いに排反であることから、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \frac{3}{35} \cdot 2 + \frac{3}{70} \cdot 3 &= \frac{35}{70} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

問題 3

(1)

楕円 C の焦点の y 座標は

$$\pm\sqrt{2^2-1^2}=\pm\sqrt{3}$$

であるから、 $y>0$ の範囲にある焦点は $F(0,\sqrt{3})$ である。したがって、直線 l の方程式は

$$y=mx+\sqrt{3}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad y=mx+\sqrt{3}$$

(2)

直線 l と楕円 C の交点の x 座標は、両者の方程式から y を消去した

$$x^2+\frac{(mx+\sqrt{3})^2}{4}=1$$

$$\Leftrightarrow (m^2+4)x^2+2\sqrt{3}mx-1=0 \quad \cdots (*)$$

の実数解である。ここで、 $m^2+4>0$ より、 m の値にかかわらず(*)は二次方程式となり、判別式を D とすると

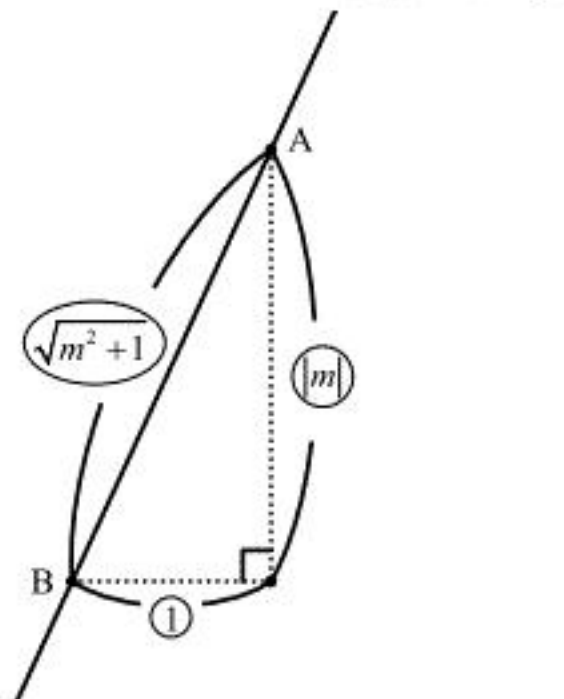
$$\frac{D}{4}=(\sqrt{3}m)^2+(m^2+4)$$

$$=4(m^2+1)$$

となることから、任意の実数 m について $D>0$ 、すなわち直線 l と楕円 C は2個の交点をもつ。したがって、交点 A, B の x 座標は

$$x=\frac{-\sqrt{3}m\pm2\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}$$

と表せる。



これより、線分 AB を x 軸に射影した線分の長さは

$$\frac{-\sqrt{3}m+2\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}-\frac{-\sqrt{3}m-2\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}=\frac{4\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}$$

であり、直線 l の傾きは m であることから、直線 l 、点 A を通り y 軸に平行な直線、点 B を通り x 軸に平行な直線の3本に囲まれてできる上図の直角三角形の辺々の比は $1:|m|:\sqrt{1+m^2}$

となる。したがって

$$\begin{aligned} AB &= \frac{4\sqrt{m^2+1}}{m^2+4} \cdot \sqrt{m^2+1} \\ &= \frac{4(m^2+1)}{m^2+4} \end{aligned}$$

を得る。

$$\text{(答)} \quad AB=\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}$$

(3)

楕円 C 上の任意の点は2つの焦点までの距離の和が4で一定となることから

$$\begin{cases} AF+AF'=4 \\ BF+BF'=4 \end{cases}$$

である。ここで、 A, F, B はこの順で同一直線上にあるから、 $AF+BF=AB$ となることに注意して、この2式の和をとると

$$AF+AF'+BF+BF'=8$$

$$\Leftrightarrow AF'+BF'=8-AB$$

$$\Leftrightarrow AF'+BF'=8-\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}$$

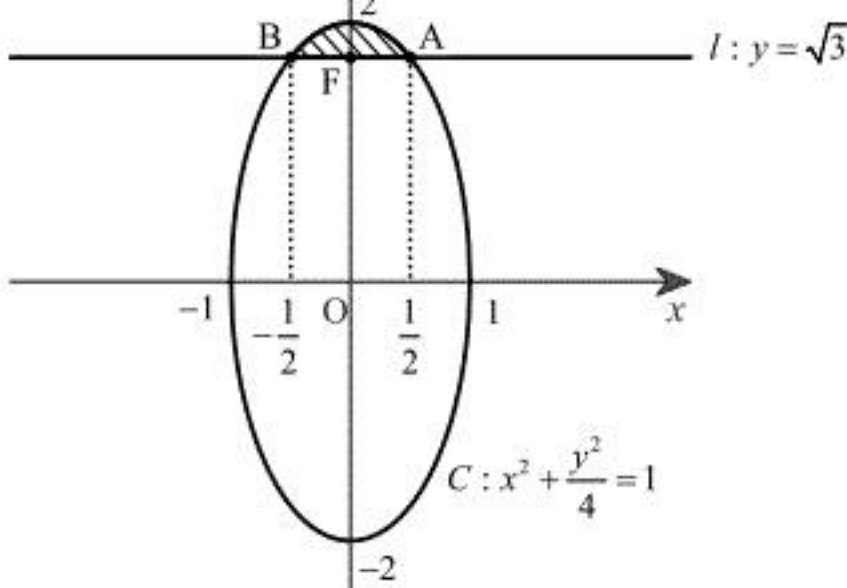
$$\Leftrightarrow AF'+BF'=4+\frac{12}{m^2+4}$$

を得る。よって、(2)の議論より m は任意の実数値をとりうるため、 $AF'+BF'$ が最大となるのは $m=0$ のときであり、このとき最大値7をとる。

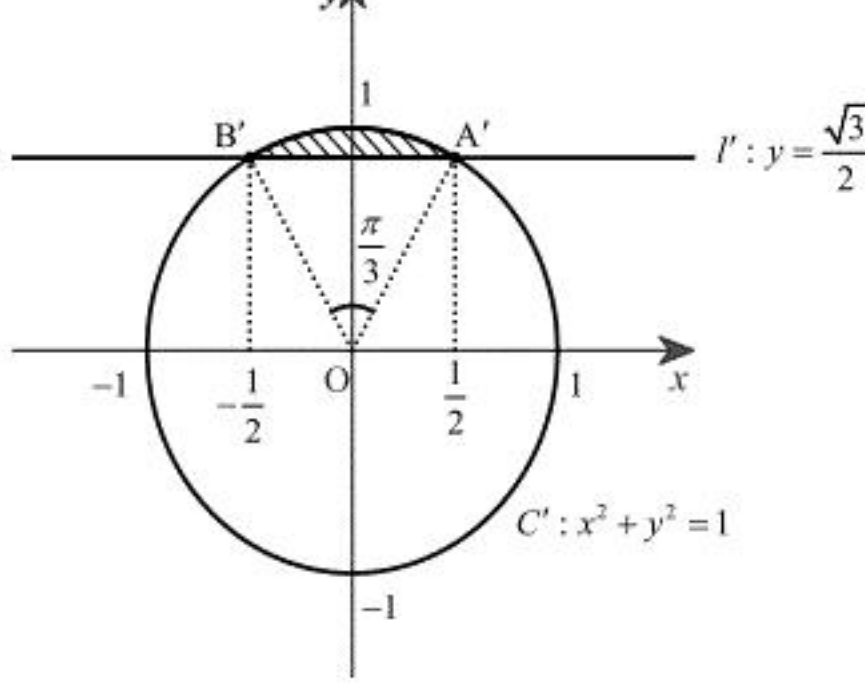
$$\text{(答)} \quad \text{最大値: } 7$$

(4)

(3)の結果より、 $m=0$ 、すなわち直線 $l:y=\sqrt{3}$ における D の面積を求めればよく、このときの領域 D の概形を図示すると次の通りである。



領域 D の面積を S とする。ここで、 xy 平面全体を y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍したときに楕円 C 、直線 l 、点 A, B 、領域 D の移る先をそれぞれ円 C' 、直線 l' 、点 A', B' 、領域 D' とすると、それらの概形は次図のようになる。



このとき、 $OA'=OB'=A'B'=1$ より、 $\triangle OA'B'$ は正三角形であり、 $\angle A'OB'=\frac{\pi}{3}$ となる。よって、

領域 D' は半径1、頂角 $\frac{\pi}{3}$ の扇形から一辺の長さが1の正三角形を取り除いたものであり、この面

積が $\frac{S}{2}$ であるから

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

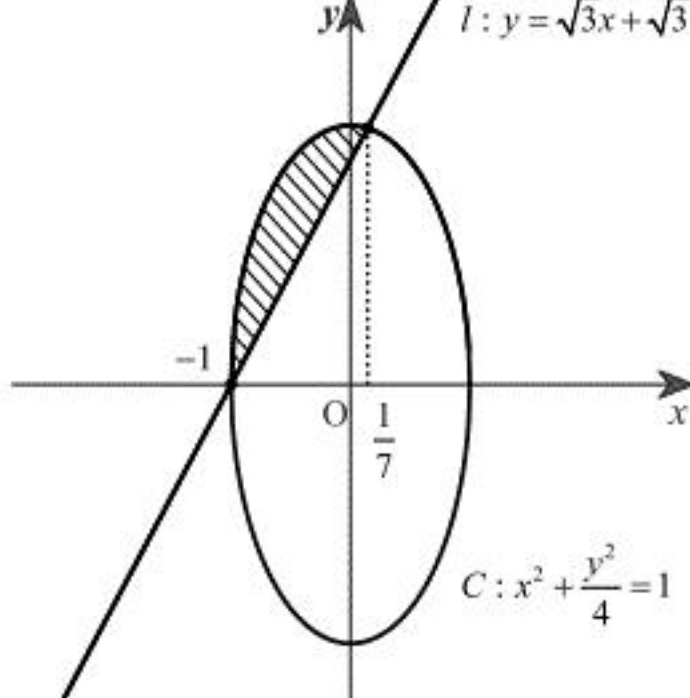
$$\therefore S=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

を得る。

$$\text{(答)} \quad \frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(5)

$m=\sqrt{3}$ における領域 D の概形は次図の斜線部である。



ここで、 $m=\sqrt{3}$ における直線 l と楕円 C の交点の x 座標は、(2)の結果より

$$x=\frac{-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\pm2\sqrt{3+1}}{4+3}$$

$$=\frac{-3\pm4}{7}$$

$$=-1, \frac{1}{7}$$

である。さらに、楕円 C の方程式を変形すると

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Leftrightarrow y^2=4(1-x^2)$$

となるから、求める立体の体積を V とおくと

$$V=\pi\int_{-1}^{\frac{1}{7}}\left\{4(1-x^2)-(\sqrt{3}x+\sqrt{3})^2\right\}dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{\frac{1}{7}}(-7x^2-6x+1)dx$$

$$=7\pi\cdot\int_{-1}^{\frac{1}{7}}(x+1)\left(x-\frac{1}{7}\right)dx$$

$$=7\pi\cdot\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{7}\right)\right\}^3$$

$$=\frac{256}{147}\pi$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{256}{147}\pi$$