

問題 1

【解答】

(1)	－	4					
	ウ	エ	オ				
(2)	－	1	6				
	カ	キ					
(3)	1	4					
	ク	ケ					
(4)	3	8					
	コ	サ	シ				
(5)	－	4	3				
	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	
(6)	7	2	8	3	6	4	
	テ	ト	ナ	ニ			
(7)	2	7	2	1			
	ヌ	ネ	ノ	ハ			
(8)	－	3	5	2			
	ヒ	フ					
(9)	8	1					
	ヘ	ホ					
(10)	1	3					

解説]

条件より、

$$\begin{cases} \frac{-14+16+21+a+b}{5}=5 \\ \frac{(-14)^2+16^2+21^2+a^2+b^2}{5} \\ a+b=2 \end{cases}$$

【解説】

(1)

条件より、

$$\begin{cases} \frac{-14+16+21+a+b}{5}=5 \\ \frac{(-14)^2+16^2+21^2+a^2+b^2}{5}-5^2=164 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a^2+b^2=52 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ (a+b)^2-2ab=52 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=-24 \end{cases}$$

であるから、 a, b は x の 2 次方程式 $x^2-2x-24=0$ の異なる 2 つの実数解となる。よって、

$$\begin{aligned} x^2-2x-24 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+4)(x-6) &= 0 \\ \therefore x &= -4, 6 \end{aligned}$$

より、 $a < b$ のとき、 $a = -4, b = 6$ である。

(2)

$$\begin{aligned} \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta &= 2 \cos (\theta + a \pi) \\ &= 2 \cos \theta \cos a \pi - 2 \sin \theta \sin a \pi \end{aligned}$$

である。 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ を代入することで、

$$\cos a \pi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin a \pi = -\frac{1}{2}$$

を得る。逆に、 $\cos a \pi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin a \pi = -\frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} 2 \cos (\theta + a \pi) &= 2 \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \sin \theta \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \end{aligned}$$

となるため、任意の実数 θ で $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \cos (\theta + a \pi)$ が成り立つ。 $-1 \leq a < 1$ のとき、

$$-\pi \leq a \pi < \pi \text{ であるから、これを満たす } a \text{ は、} a \pi = \frac{-\pi}{6} \Leftrightarrow a = \frac{-1}{6} \text{ である。}$$

(3)

$$5000^x = 2000^y = \sqrt{10}$$

の各辺において、底を 10 とする対数をとると、

$$\begin{aligned} x \log_{10} 5000 &= y \log_{10} 2000 = \frac{1}{2} \\ \therefore \begin{cases} x = \frac{1}{2 \log_{10} 5000} \\ y = \frac{1}{2 \log_{10} 2000} \end{cases} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 2(\log_{10} 5000 + \log_{10} 2000) \\ &= 2 \log_{10} 10^7 \\ &= 14 \end{aligned}$$

である。

(4)

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2-9}}}$$

より、 $f(x)$ の $x=5$ における微分係数は、

$$f'(5) = \frac{1 + \frac{5}{\sqrt{25-9}}}{2\sqrt{5+\sqrt{25-9}}} = \frac{1 + \frac{5}{4}}{2\sqrt{5+4}} = \frac{3}{8}$$

である。

(5)

$\int_0^2 f(t) dt$ は定数であるから、これを k とおくと、

$$f(x) = 3x^2 + kx + a$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} k &= \int_0^2 f(t) dt \\ &= \int_0^2 (3t^2 + kt + a) dt \\ &= \left[t^3 + \frac{k}{2} t^2 + at \right]_0^2 \\ &= 8 + 2k + 2a \end{aligned}$$

である。また、 $f(2) = 0$ より、

$$12 + 2k + a = 0$$

である。したがって、連立方程式を解いて、 $k = -\frac{16}{3}, a = -\frac{4}{3}$ を得る。

(6)

分母が 3^m である項を第 m 群に分けると、第 m 群には $3^m - 3^{m-1} = 2 \cdot 3^{m-1}$ (個) の項が含まれる。

$729 = 3^6$ であるため、 $\frac{728}{729}$ は第 6 群の最終項となる。したがって、この数列において $\frac{728}{729}$ は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 2 \cdot 3^{k-1} &= \frac{2(3^6 - 1)}{3 - 1} \\ &= 728 \end{aligned}$$

より第 728 項となる。また、第 m 群に含まれる項の和は

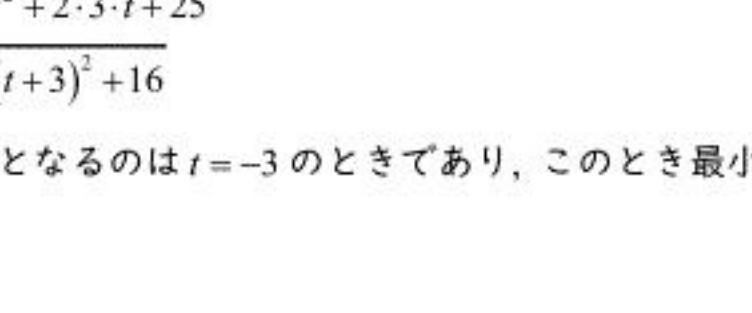
$$\begin{aligned} \frac{(1+2+3+\cdots+3^m) - (3+6+9+\cdots+3^m)}{3^m} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 3^m (3^m + 1) - \frac{1}{2} \cdot 3^{m-1} (3^m + 3)}{3^m} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 3^m (3^m + 1) - \frac{1}{2} \cdot 3^m (3^{m-1} + 1)}{3^m} \\ &= \frac{1}{2} (3^m - 3^{m-1}) \\ &= 3^{m-1} \end{aligned}$$

であるから、初項から第 728 項までの和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 3^{k-1} &= \frac{3^6 - 1}{3 - 1} \\ &= 364 \end{aligned}$$

となる。

(7)



$BD:CD = AB:AC = 9:7$ より、角の二等分線の性質から $BD = \frac{9}{9+7} \cdot 48 = 27$ である。

$\angle BAD = \angle CAD = \theta$ とおく。

$\triangle BAD, \triangle CAD$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} \\ &= \frac{AD^2 + 36^2 - 27^2}{2 \cdot 36 \cdot AD} \\ \cos \theta &= \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2AC \cdot AD} \\ &= \frac{AD^2 + 28^2 - 21^2}{2 \cdot 28 \cdot AD} \end{aligned}$$

となる。ここから $\cos \theta$ を消去することで、

$$\begin{aligned} \frac{AD^2 + 36^2 - 27^2}{2 \cdot 36 \cdot AD} &= \frac{AD^2 + 28^2 - 21^2}{2 \cdot 28 \cdot AD} \\ \Leftrightarrow 7(AD^2 + 36^2 - 27^2) &= 9(AD^2 + 28^2 - 21^2) \\ \Leftrightarrow 2AD^2 &= 7 \cdot (36+27) \cdot (36-27) - 9 \cdot (28+21) \cdot (28-21) \\ \Leftrightarrow 2AD^2 &= 7 \cdot 9 \cdot (63-49) \\ \Leftrightarrow AD^2 &= 21^2 \\ \therefore AD &= 21 (\because AD > 0) \end{aligned}$$

を得る。

(8)

$\vec{a} + t\vec{b} = (56+12t, -33+5t)$ より、

$$\begin{aligned} |\vec{a} + t\vec{b}| &= \sqrt{(56+12t)^2 + (-33+5t)^2} \\ &= \sqrt{(144+25)t^2 + 2(672-165)t + (3136+1089)} \\ &= \sqrt{13^2 t^2 + 2 \cdot 3 \cdot 13^2 t + 65^2} \\ &= 13\sqrt{t^2 + 2 \cdot 3 \cdot t + 25} \\ &= 13\sqrt{(t+3)^2 + 16} \end{aligned}$$

である。これが最小となるのは $t = -3$ のときであり、このとき最小値は $13\sqrt{16} = 52$ である。

(9)

$$\begin{aligned} \frac{2+\sqrt{-77}}{9} &= \frac{2+\sqrt{77}i}{9} \\ \frac{x+y\sqrt{-77}}{9} &= \frac{x+\sqrt{77}yi}{9} \end{aligned}$$

である(i は虚数単位)。 $\left(\frac{2+\sqrt{-77}}{9}\right)^{2021} = \frac{x+y\sqrt{-77}}{9}$ の両辺の絶対値をとることで、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2^2+77}}{9}\right)^{2021} &= \frac{\sqrt{x^2+77y^2}}{9} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{\sqrt{x^2+77y^2}}{9} \\ \therefore x^2+77y^2 &= 9^2 = 81 \end{aligned}$$

を得る。

(10)

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = k - 4 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = k + 13 \\ \alpha\beta\gamma = 3k - 15 \end{cases}$$

が成立する。 $2\beta = \alpha + \gamma$ を代入して、

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(\alpha + \gamma) = k - 4 \\ \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)^2 + \alpha\gamma = k + 13 \\ \frac{1}{2}\alpha\gamma(\alpha + \gamma) = 3k - 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = \frac{2}{3}(k - 4) \\ \alpha\gamma = k + 13 - \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}(k - 4)\right\}^2 \\ \frac{1}{2}\left[k + 13 - \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}(k - 4)\right\}^2\right] \cdot \frac{2}{3}(k - 4) = 3k - 15 \end{cases}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[k + 13 - \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}(k - 4)\right\}^2\right] \cdot \frac{2}{3}(k - 4) &= 3k - 15 \\ \Leftrightarrow \left\{k + 13 - \frac{2}{9}(k - 4)^2\right\}(k - 4) &= 3(3k - 15) \\ \Leftrightarrow \{9(k + 13) - 2(k^2 - 8k + 16)\}(k - 4) &= 9 \cdot 3(3k - 15) \\ \Leftrightarrow (-2k^2 + 25k + 85)(k - 4) &= 81k - 405 \\ \Leftrightarrow -2k^3 + 33k^2 - 96k + 65 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k - 1)(-2k^2 + 31k - 65) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(k - 1)(2k - 5)(k - 13) &= 0 \\ \therefore k &= 1, \frac{5}{2}, 13 \end{aligned}$$

となる。以下、 k の値によって場合分けして考える。

[1] $k = \frac{5}{2}$ のとき

$$\alpha + \gamma = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{2} - 4\right) = -1 \text{ より、} \beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = -\frac{1}{2} \text{ となり、整数解であることに反する。}$$

[2] $k = 1$ のとき

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = \frac{2}{3}(1 - 4) = -2 \\ \alpha\gamma = 1 + 13 - \frac{1}{2}(-2)^2 = 12 \end{cases}$$

である。 α, γ は、 t の 2 次方程式 $t^2 + 2t + 12 = 0$ の異なる 2 つの整数解であるが、

$$t^2 + 2t + 12 = (t + 1)^2 + 11 > 0$$

より、実数解を持たないので、 $k = 1$ も不適である。

[3] $k = 13$ のとき

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = \frac{2}{3}(13 - 4) = 6 \\ \alpha\gamma = 13 + 13 - \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 8 \end{cases}$$

である。 α, γ は、 t の 2 次方程式 $t^2 - 6t + 8 = 0$ の異なる 2 つの整数解である。

$$\begin{aligned} t^2 - 6t + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 2)(t - 4) &= 0 \\ \therefore t &= 2, 4 \end{aligned}$$

より、 $\{\alpha, \gamma\} = \{2, 4\}$ となり、このとき $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 3$ となり、すべて整数となる。

以上、[1], [2], [3] より、 $k = 13$ である。

問題 2

(1)

できた整数が4の倍数となるのは、下2桁が4の倍数であるときであり、各桁は1, 2のみで構成されることを考えると、下2桁が12のときである。このようになるのは、3回目に12を取り出す、または3回目に2を取り出し、2回目に1または11を取り出すときであり、これらの事象は互いに排反である。したがってその確率は、

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{8}$$

である。

(答) $\frac{3}{8}$

(2)

できた整数が3の倍数となるのは、各桁の和が3の倍数となるときである。1, 2, 11, 12の各桁の和は、1, 2, 2, 3である。この3つの合計が3の倍数となるのは、

(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1) と取り出すときである。したがってその確率は、

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3! \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{32}$$

である。

(答) $\frac{11}{32}$

(3)

できた整数の桁数で場合分けする。

[1] 3桁のとき

これは1, 2を3回取り出すときである。このとき、できる $2^3 = 8$ (個)の整数はすべて異なる。

[2] 4桁のとき

上2桁が11, 12のとき、1回目に11, 12を取り出したと考えると、下2桁が11, 12, 21, 22となるものを作ることができる。上1桁が2のとき、1回目に2を取り出している。その次の2桁が11, 12のとき、2回目に11, 12を取り出したと考えると、下1桁が1, 2となるものを作ることができる。その次の1桁も2のとき、2回目にも2を取り出している。このとき、下2桁が11, 12となるものを作ることができる。したがって、4桁の整数は、

$$2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 2 = 14$$

通りできる。

[3] 5桁のとき

上2桁が11, 12のとき、1回目に11, 12を取り出したと考えると、[2]より、下2桁が111, 112, 121, 122, 211, 212となるものを作ることができる。上1桁が2のとき、1回目に2を取り出している。このとき、下4桁が1111, 1112, 1211, 1212となるものを作ることができる。したがって、5桁の整数は、

$$2 \cdot 6 + 4 = 16$$

通りできる。

[4] 6桁のとき

これは11, 12を3回取り出すときである。このとき、できる $2^3 = 8$ (個)の整数はすべて異なる。

以上、[1]から[4]より、作ることのできる整数は $8 + 14 + 16 + 8 = 46$ (通り)である。

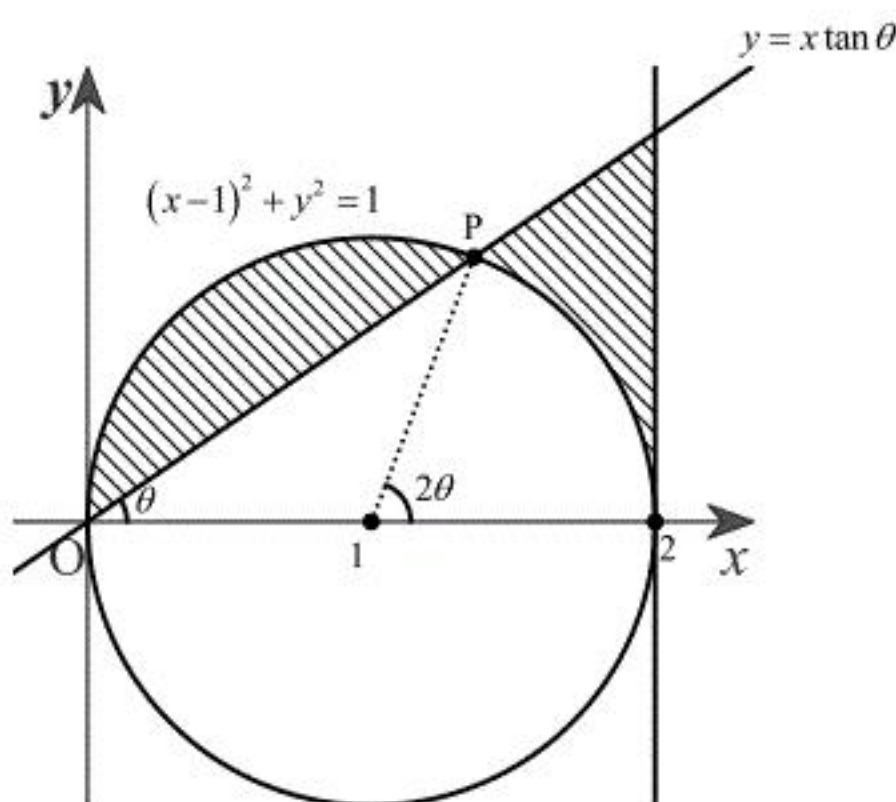
(答) 46 通り

問題 3

(1)

$$\begin{aligned} & \{x(x-2)+y^2\}(x \tan \theta - y) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x(x-2)+y^2 \geq 0 \\ x \tan \theta - y \geq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} x(x-2)+y^2 \leq 0 \\ x \tan \theta - y \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x-1)^2+y^2 \geq 1 \\ y \leq x \tan \theta \end{cases} \text{ または } \begin{cases} (x-1)^2+y^2 \leq 1 \\ x \tan \theta \leq y \end{cases} \end{aligned}$$

である。 $y = x \tan \theta$ は、原点を通り、 x 軸の正の方向とのなす角が θ の直線であるから、
 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $y = x \tan \theta$ と $(x-1)^2 + y^2 = 1$ は、原点と第一象限の点 P で交わる。よって、
 $\{x(x-2)+y^2\}(x \tan \theta - y) \geq 0$ かつ $y \geq 0$ かつ $0 \leq x \leq 2$ を満たす領域を図示すると、以下のようになる。ただし、境界はすべて含む。



(答) 前図。ただし、境界はすべて含む。

(2)

A(1, 0), B(2, 0) とおくと、 $\triangle AOP$ は、 $AO = AP$ の二等辺三角形であるから、
 $\angle AOP = \angle APO = \theta$ である。よって、 $\angle BAP = 2\theta$ であり、P の座標は、 $(1 + \cos 2\theta, \sin 2\theta)$ であるとわかる。これより、(1)の領域を x 軸の回りに1回転してできる立体の体積は、

$$\begin{aligned} & \int_0^{1+\cos 2\theta} \pi \left[\{-x(x-2)\} - (x \tan \theta)^2 \right] dx + \int_{1+\cos 2\theta}^2 \pi \left[(x \tan \theta)^2 - \{-x(x-2)\} \right] dx \\ &= \pi \left(\int_{2\cos^2 \theta}^2 \{(\tan^2 \theta + 1)x^2 - 2x\} dx - \int_0^{2\cos^2 \theta} \{(\tan^2 \theta + 1)x^2 - 2x\} dx \right) \\ &= \pi \left(\left[\frac{x^3}{3\cos^2 \theta} - x^2 \right]_{2\cos^2 \theta}^2 - \left[\frac{x^3}{3\cos^2 \theta} - x^2 \right]_0^{2\cos^2 \theta} \right) \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{8}{3\cos^2 \theta} - 4 \right) - 2 \left(-\frac{4}{3}\cos^4 \theta \right) \right\} \\ &= \frac{8}{3}\pi \left(\cos^4 \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) - 4\pi \end{aligned}$$

である。 $a = \cos \theta$ とおくと、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $0 < a < 1$ である。 $f(a) = a^4 + \frac{1}{a^2}$ とおくと、

$$f'(a) = 4a^3 - \frac{2}{a^3} = \frac{2(2a^6 - 1)}{a^3}$$

より、 $f'(a) = 0$ となるのは $a = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ であり、増減表は以下のようになる。

a	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$	...	(1)
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって、 $f(a)$ の、 $0 < a < 1$ における最小値は、

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right) = \left(\frac{1}{2} + 1\right)(\sqrt[6]{2})^2 = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

である。体積が最小となるのは、 $f(a)$ が最小となるときであるから、体積の最小値は、

$$\frac{8}{3}\pi \cdot \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} - 4\pi = 4(\sqrt[3]{2} - 1)\pi \text{ である。このとき、} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \text{ である。}$$

(答) 体積の最小値: $4(\sqrt[3]{2} - 1)\pi$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$