

問題 1

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ		
	1	9	7	4		
(2)	オ	カ				
	2	8				
(3)	キ	ク				
	1	3				
(4)	ケ	コ				
	8	1				
(5)	サ	シ	ス	セ	ソ	
	5	8	7	1	6	
(6)	タ	チ				
	8	1				
(7)	ツ	テ				
	8	4				
(8)	ト	ナ	ニ			
	1	1	5			
(9)	ヌ	ネ	ノ			
	－	1	2			
(10)	ハ	ヒ	フ			
	5	2	7			
(11)	ヘ	ホ	マ			
	8	1	5			

解説】

1 年生の各生徒の得点を $x_1, x_2, \dots, x_{40}$ 、2 年

【解説】

(1)

1 年生の各生徒の得点を $x_1, x_2, \cdots, x_{40}$, 2 年生の各生徒の得点を $x_{41}, x_{42}, \cdots, x_{100}$ とおき、全体

の平均得点を $\bar{x}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i \\ &= \frac{1}{100} \left(\sum_{i=1}^{40} x_i + \sum_{i=41}^{100} x_i \right) \\ &= \frac{1}{100} (40 \cdot 10 + 60 \cdot 25) \\ &= 19\end{aligned}$$

となる。ここで、1 年生と 2 年生の分散が 20 であるから、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{40}^2}{40} - 10^2 = 20 \\ \frac{x_{41}^2 + x_{42}^2 + \cdots + x_{100}^2}{60} - 25^2 = 20 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{40}^2 = 4800 \\ x_{41}^2 + x_{42}^2 + \cdots + x_{100}^2 = 38700 \end{cases}\end{aligned}$$

となる。よって、全体の分散は、

$$\begin{aligned}\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{100}^2}{100} - (\bar{x})^2 &= \frac{4800 + 38700}{100} - 19^2 \\ &= 74\end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}&(x-7)(x-5)(x+1)(x+7) = 405 \\ \Leftrightarrow &x^4 - 4x^3 - 54x^2 + 196x - 160 = 0 \\ \Leftrightarrow &(x-2)(x^3 - 2x^2 - 58x + 80) = 0 \\ \Leftrightarrow &(x-2)(x-8)(x^2 + 6x - 10) = 0 \\ \therefore &x = 2, 8, -3 \pm \sqrt{19}\end{aligned}$$

となるから、整数解は $x = 2, 8$ となる。

(3)

条件を満たす状況は偶数の目が 3 つ出るとき、奇数の目と 2 または 6 の目と 4 の目が出る

とき、奇数の目と 4 の目が 2 つ出るときの 3 種類の場合に分けられる。よって、これらは互い

に排反であるので、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3\text{P}_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + {}_3\text{P}_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

となる。

(4)

真数、底の条件より $x > 0$ ($x \neq 1$) となる。このもとで

$$\begin{aligned}\log_9 x + 4 \log_x 3 &= 3 \\ \Leftrightarrow &\frac{\log_3 x}{2} + \frac{4}{\log_3 x} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow &(\log_3 x)^2 - 6 \log_3 x + 8 = 0 \\ \Leftrightarrow &(\log_3 x - 2)(\log_3 x - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow &\log_3 x = 2, 4 \\ \therefore &x = 9, 81\end{aligned}$$

となり、これらは真数、底の条件を満たす。このうち、2 桁の整数は $x = 81$ となる。

(5)

$\sin x + \cos x = t$ とおくと、

$$\begin{aligned}t &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

より、 x は実数であるから $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ となる。また、

$$\begin{aligned}t^2 &= (\sin x + \cos x)^2 \\ \Leftrightarrow t^2 &= \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x \\ \therefore \sin 2x &= t^2 - 1 \quad (\because \sin 2x = 2 \sin x \cos x)\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}4 \sin 2x - 5 \sin x - 5 \cos x + 6 &= 4 \cdot (t^2 - 1) - 5 (\sin x + \cos x) + 6 \\ &= 4t^2 - 5t + 2 \\ &= 4 \left(t - \frac{5}{8} \right)^2 + \frac{7}{16}\end{aligned}$$

となるので、 $t = \sin x + \cos x = \frac{5}{8}$ のとき、最小値 $\frac{7}{16}$ をとる。

(6)

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 3a_n + 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + 1 &= 3(a_n + 1)\end{aligned}$$

より、数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1$ 、公比 3 の等比数列であるから、

$$\begin{aligned}a_n + 1 &= 3^{n-1} (a_1 + 1) \\ \therefore a_n &= 2 \cdot 3^n - 1\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{a_{16} - a_{13}}{a_{12} - a_9} &= \frac{(2 \cdot 3^{16} - 1) - (2 \cdot 3^{13} - 1)}{(2 \cdot 3^{12} - 1) - (2 \cdot 3^9 - 1)} \\ &= \frac{3^{13} (3^3 - 1)}{3^9 (3^3 - 1)} \\ &= 81\end{aligned}$$

となる。

(7)

$\sqrt[3]{x} = t$ とおくと、 $x = t^3$ より

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 9x + 8}{\sqrt{x} - 2} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^6 - 9t^3 + 8}{t - 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t-2)(t^2 + 2t + 4)(t^3 - 1)}{t - 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} (t^2 + 2t + 4)(t^3 - 1) \\ &= (2^2 + 2 \cdot 2 + 4) \cdot (2^3 - 1) \\ &= 84\end{aligned}$$

となる。

(8)

$$3\vec{a} + 5\vec{b} + 6\vec{c} = 0 \Leftrightarrow 3\vec{a} + 5\vec{b} = -6\vec{c}$$

に対して、両辺ベクトルの大きさの 2 乗を考えると、

$$\begin{aligned}9|\vec{a}|^2 + 30\vec{a} \cdot \vec{b} + 25|\vec{b}|^2 &= 36|\vec{c}|^2 \\ \Leftrightarrow 30\vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \left(\because |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \right) \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{15}\end{aligned}$$

となる。

(9)

a, b は実数より、与えられた 4 次方程式は実数係数の方程式であるから、 $1 + i$ が解であれば

$1 - i$ も解となる。これら 2 つの複素数の和は 2、積は 2 であるから、解と係数の関係よりこ

れらは 2 次方程式

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

の解である。したがって 4 次方程式 $x^4 + ax^3 + 2x^2 + 2x + b = 0$ は $x^2 - 2x + 2$ で割り切れる。こ

こで、

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + 2x + b = (x^2 - 2x + 2) \left\{ x^2 + (a+2)x + 2a+4 \right\} + (2a+6)x - 4a+b-8$$

であることから

$$\begin{aligned}&\begin{cases} 2a+6=0 \\ -4a+b-8=0 \end{cases} \\ \therefore (a, b) &= (-3, -4)\end{aligned}$$

が成立する。このとき、

$$\begin{aligned}&x^4 + ax^3 + 2x^2 + 2x + b = 0 \\ \Leftrightarrow &(x^2 - 2x + 2)(x^2 - x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow &(x^2 - 2x + 2)(x-2)(x+1) = 0 \\ \therefore x &= -1, 2, 1 \pm i\end{aligned}$$

となるため、実数解は $x = -1, 2$ となる。

(10)

$x > 6$ のとき、両辺の自然対数をとって、

$$\log f(x) = \frac{1}{4} \{ 3 \log(x-6) - 2 \log(x-4) - \log(x+2) \}$$

となる。両辺を x で微分して、

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{x-6} - \frac{2}{x-4} - \frac{1}{x+2} \right) \\ \therefore f'(x) &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{x-6} - \frac{2}{x-4} - \frac{1}{x+2} \right) \cdot f(x)\end{aligned}$$

となる。よって、

$$f(7) = \sqrt[4]{3^3 \cdot 9} = \frac{1}{3}$$

より

$$\begin{aligned}f'(7) &= \frac{1}{4} \left(3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{27}\end{aligned}$$

となる。

(11)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x) \cdot (\cos x)' dx \\ &= - \left[\cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{8}{15}\end{aligned}$$

となる。

問題 2

(1)

x, y, z 軸に平行な辺の長さをそれぞれ x, y, z とし、 x, y, z の組を考える。1つの x, y, z の組に対して、 x, y, z 軸についてそれぞれ原点から正の方向に延びるか負の方向に延びるかで $2^3 = 8$ (通り) がある。ここで x, y, z の組は 2, 3, 4 の順列と等しく $3! = 6$ 通りあるから、直方体は $8 \cdot 6 = 48$ (通り) 作れる。

(答) 48 通り

(2)

$x + y + z = 9$ (x, y, z は自然数) となる x, y, z の組は 9 個の $\bigcirc$ の間 8 個に仕切り 2 個を入れる入れ方と等しく ${}_8C_2 = 28$ (通り) があるから、直方体は $8 \cdot 28 = 224$ (通り) 作れる。

(答) 224 通り

(3)

$xyz = 64$ (x, y, z は自然数) となる x, y, z の組は $64 = 2^6$ より素因数 2 に注目すると、 $a + b + c = 6$ (a, b, c は 0 以上の整数) となる a, b, c の組と等しい。この組は 6 個の $\bigcirc$ と 2 個の仕切りを並べる順列と等しく ${}_6C_2 = 15$ (通り) があるので、直方体は $8 \cdot 15 = 120$ (通り) 作れる。

(答) 120 通り

(4)

$xyz = 1800$ (x, y, z は自然数) となる x, y, z の組について考える。 $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ より、素因数 2, 3, 5 のそれぞれの分け方に注目して場合分けをする。

[1] 素因数 2 の分け方

$p_1 + p_2 + p_3 = 3$ (p_1, p_2, p_3 は 0 以上の整数) となる p_1, p_2, p_3 の組と等しい。この組は 3 個の $\bigcirc$ と 2 個の仕切りの順列と等しく ${}_5C_2 = 10$ (通り) である。

[2] 素因数 3 の分け方

$q_1 + q_2 + q_3 = 2$ (q_1, q_2, q_3 は 0 以上の整数) となる q_1, q_2, q_3 の組と等しい。この組は 2 個の $\bigcirc$ と 2 個の仕切りの順列と等しく ${}_4C_2 = 6$ (通り) である。

[3] 素因数 5 の分け方

$r_1 + r_2 + r_3 = 2$ (r_1, r_2, r_3 は 0 以上の整数) となる r_1, r_2, r_3 の組と等しく、この組は ${}_4C_2 = 6$ (通り) である。

以上、[1], [2], [3] より、各因数の分け方は互いに独立であることも考えると、 x, y, z の組は $10 \cdot 6 \cdot 6 = 360$ (通り) がある。したがって直方体は $8 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 6 = 2880$ (通り) 作れる。

(答) 2880 通り

問題 3

(1)

$$(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta + (k - \theta) \cos \theta) \text{ より}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos \theta - 1 \cdot \cos \theta - (k - \theta) \sin \theta = (\theta - k) \sin \theta$$

であり、 $0 < k < \frac{\pi}{2}$ より増減は以下になる。

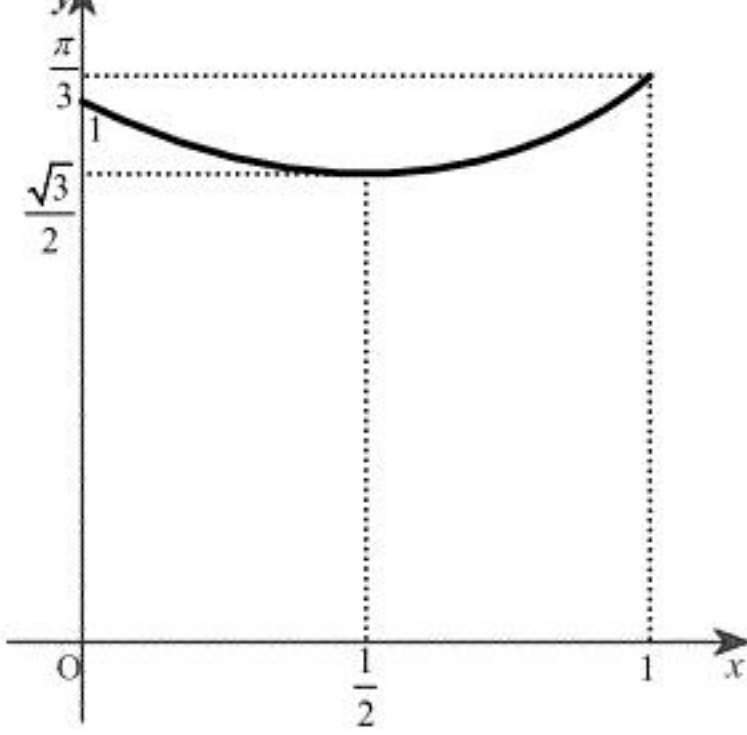
θ	0	...	k	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\theta}$	0	-	-	-	
$\frac{dy}{d\theta}$	0	-	0	+	
(x, y)	$(1, k)$	↙	$(\cos k, \sin k)$	↖	$(0, 1)$

よって、 x に対して y は $0 \leq x \leq \cos k$ のとき減少し、 $\cos k \leq x \leq 1$ のとき増加する。また、 $\theta = k$ のとき極小値 $\sin k$ をとる。

(答) 前表

(2)

$k = \frac{\pi}{3}$ を代入して、 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ よりグラフは以下になる。



(答) 前図

(3)

(1)の増減表より直線 $x = 0$ は曲線 C と交点を1つもつ。直線 $x = 0$ 以外で原点を通る直線は $y = ax$ (a は実数) と表せる。この直線と曲線 C が共有点をもつとき、

$$\sin \theta + (k - \theta) \cos \theta = a \cos \theta$$

が成立する。 $\theta = \frac{\pi}{2}$ の場合は上で直線 $x = 0$ の場合として調べられていてこの場合は解として出てこないことに注意すると、満たすべき条件はこの θ についての方程式が $0 < k < \frac{\pi}{2}$ の範囲の任意の k 及び任意の a に対して、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で解を高々1つもつことである。

$\theta \neq \frac{\pi}{2}$ より両辺 $\cos \theta (\neq 0)$ で割って、

$$a = \tan \theta - \theta + k$$

となる。右辺を $h(\theta)$ とおくと、

$$h'(\theta) = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \geq 0$$

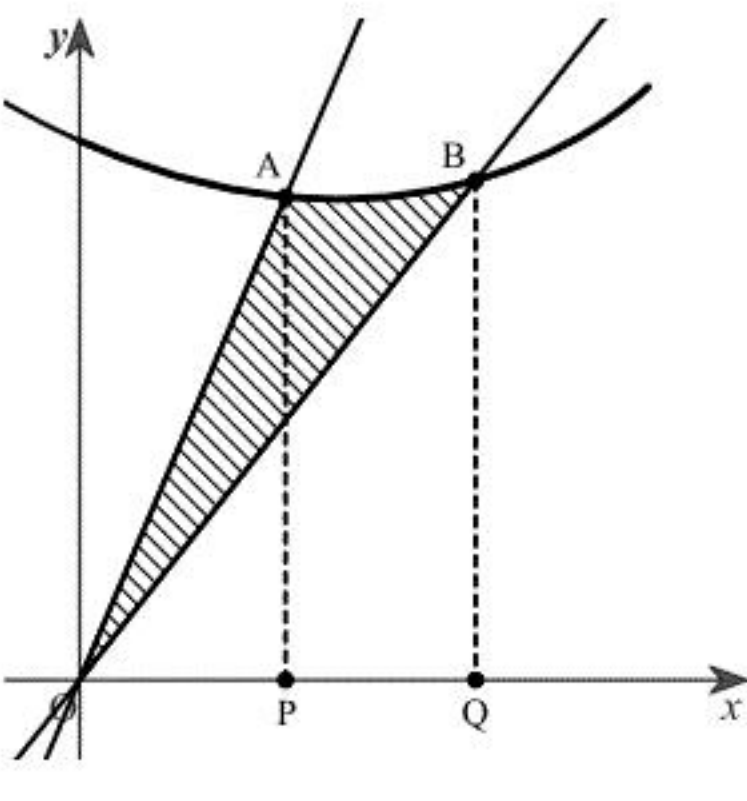
となり、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $h(\theta)$ は単調増加である。よって、 θ についての方程式が

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で解を高々1つもつ。

(証明終)

(4)

点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ から x 軸に下した垂線の足をそれぞれ点 P , Q とする。求める領域は以下の斜線部分のようになる。



S は $\triangle OAP$ の面積と $y = f(x)$ と x 軸及び2直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積を足したものから $\triangle OBQ$ の面積を引いたものである。よって、

$$S = \frac{1}{2} a \cdot f(a) + \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} b \cdot f(b)$$

となる。一方、

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b g(x) dx \\ &= \int_a^b \{f(x) - xf'(x)\} dx \\ &= \int_a^b f(x) dx - \left[xf(x) \right]_a^b + \int_a^b f(x) dx \\ &= a \cdot f(a) + 2 \int_a^b f(x) dx - b \cdot f(b) \\ &= 2S \end{aligned}$$

となるから、 $S = \frac{1}{2} I$ が成立する。

(答) $S = \frac{1}{2} I$

(5)

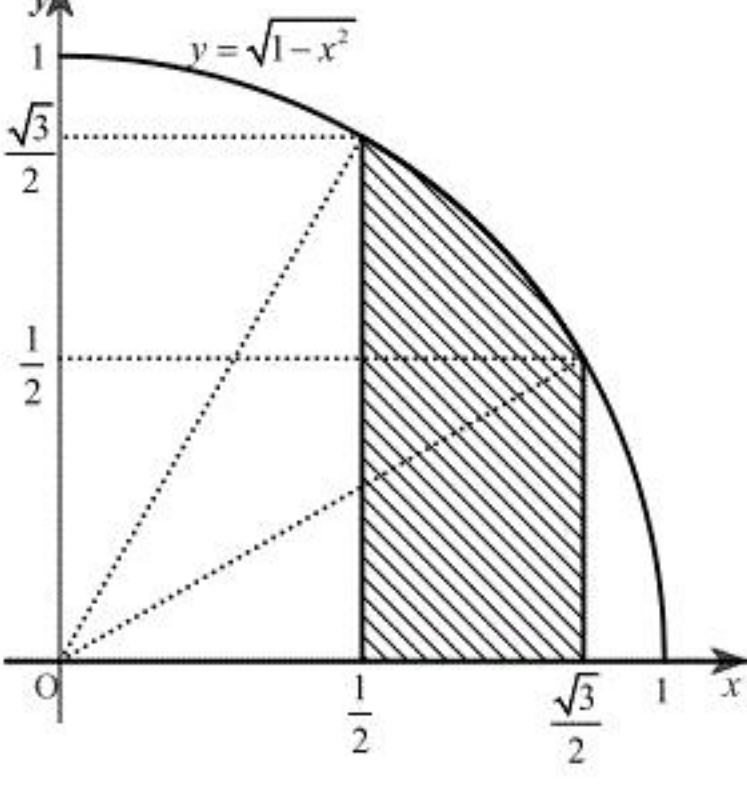
$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - xf'(x) \\ &= y - x \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= y - x \cdot \frac{d\theta}{dx} \\ &= \sin \theta + (k - \theta) \cos \theta - \cos \theta \cdot \frac{-(k - \theta) \sin \theta}{-\sin \theta} \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

となる。 $x = \cos \theta$ であり $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であるから、 $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ が成立する。よって、

$a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} I \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx$ の値は下図に示した半径1の円の斜線部の面積である。



したがって、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

となる。よって、 $S = \frac{\pi}{24}$ となる。

(答) $S = \frac{\pi}{24}$